

INSÉPARABILITÉ/PROFONDEUR D'UN MODÈLE D'ARBRE

RÉSUMÉ. On décrit ici le nombre $\iota(\beta)$ associé à des modèles $\beta : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ de d'arbre polynomiaux et primitifs. On décrit également la formule de passage entre $\iota(\beta)$ et $\iota(f)$ lorsque f est issu de d'un éclatement de β . Le concept et la formule de passage proviennent de L. Zapponi.

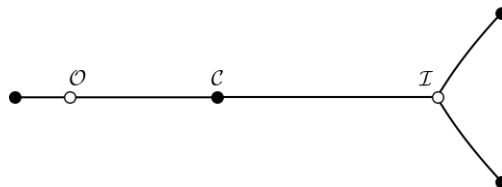
Soit $f : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ un modèle de dessin d'enfant polynomial, entier et primitif. Le corps K peut être considéré comme $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ou une extension finie de \mathbb{Q}_p contenant les sommets du dessin. Son corps résiduel sera noté k . On défini alors l'entier naturel $\iota(\beta)$, que l'on pourrait appeler **la mesure d'inséparabilité** ou la **profondeur** de β comme étant la valuation du contenu de β' .

Remarques :

- il convient de vérifier que $\iota(\beta)$ ne dépend que du modèle, c'est-à-dire que l'on retombe sur la même quantité pour $\beta(uX + b)$ et pour $v\beta + d$ (après primitivation).
- Remarque : on fixe bien entendu une valuation, par exemple $v(p) = 1$.
- Remarque : on peut sans doute étendre cette définition aux modèles non polynomiaux.

1. EXEMPLES AVEC L'ARBRE DE BELYI $B_{3,2}$

On considère l'arbre de Belyi de paramètres 2 et 3 dont la représentation complexe est donnée dans la figure suivante :



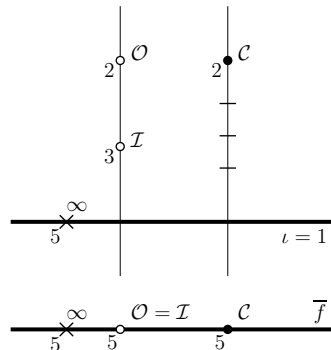
On se place dans $K = \mathbb{Q}_5$ et on considère le modèle polynomial suivant :

$$f = (X - 2)^2(X + 3)^3$$

C'est le modèle maximisant le degré des réductions \overline{f} et $f - \lambda$ ie le modèle dans lequel aucun sommet ne se réduit sur ∞ ie c'est la branche contenant l'infini dans le modèle minimal. Tout cela se voit en observant le polygone de Newton du polynôme f . Ce modèle est entier et primitif.

On calcule alors la quantité $\iota(f)$:

$$\begin{aligned} f' &= (2(X + 3) + 3(X - 2))(X - 2)(X + 3)^2 \\ &= 5X(X - 2)(X + 3)^2 \end{aligned}$$



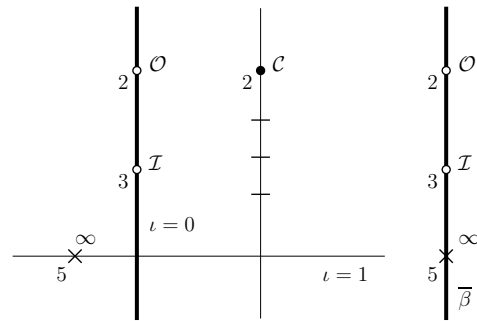
On voit ainsi que $\iota(f) = 1$. Comme $\iota(f) > 0$ alors \bar{f} n'est pas séparable. Cela se voit géométriquement car les points \mathcal{O} et \mathcal{S} se rejoignent modulo 5 ce qui donne un indice de ramification commun de 5 (et c'est le seul point de la fibre). En terme de formule $\bar{f} = (X - 2)^5$.

Comme nous l'avons remarqué,

Propriété 1. Le nombre $\iota(f)$ est nul si et seulement si la réduction \bar{f} est séparable. C'est la raison pour laquelle on pourrait appeler ce nombre l'**indice de séparabilité** de f .

Étudions maintenant la branche séparant les sommets \mathcal{O} et \mathcal{S} . Dans le modèle f ces deux sommets sont de coordonnées 2 et -3 et se réduisent donc sur le même sommet dans la réduction \bar{f} . Pour les séparer, on se centre en \mathcal{O} avec $f(2+X) = X^2(X+5)^3$ et on éclate 0 avec une épaisseur de valuation 1. Après primitivation cela donne le revêtement β ci-dessous,

$$\beta = 5^{-5} f(2+5X) = X^2(1+X)^3$$



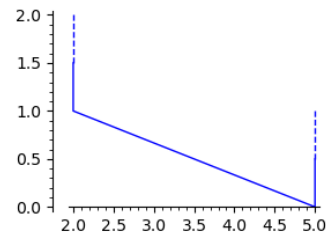
Calculons alors le nombre $\iota(\beta)$:

$$\begin{aligned} \beta' &= (2(1+X) + 3X)X(1+X)^2 \\ &= (5X+2)X(1+X)^2 \end{aligned}$$

On a donc $\iota(\beta) = 0$ ie la réduction $\bar{\beta}$ est séparable. Géométriquement la séparabilité de $\bar{\beta}$ se constate par le fait qu'il y a un indice de ramification de la réduction de \mathcal{O} est égal à 2 (car il est séparé de \mathcal{S} dans ce modèle) et qu'il y a donc au moins un indice non divisible par $p = 5$.

Étudions la dernière branche du modèle stable. Cette dernière s'obtient à partir de la branche $f = (X-2)^2(X+3)^3$ en séparant les sommets noirs. L'épaisseur de l'éclatement se trouve en étudiant les proximités de ces sommets ie avec le polygone de Newton de $\psi(X) = f(X) - 2^2(-3)^3$ donné ci-dessous :

```
Pol0=Zp(5) ['x']
var('x')
f_F=(x-2)^2*(x+3)^3
psi_F=f_F-(-2)^2*3^3
plot(Pol0(psi_F.expand()).newton_polygon(),
     figsize=3)
```



Avec π une racine de $X^3 - 1$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ on a donc

$$\beta = \psi(\pi X)\pi^{-5}$$

Il est important de bien comprendre le π^{-5} : d'après le polygone de Newton on a

$$\psi = X^2(X - \pi u_1)(X - \pi u_2)(X - \pi u_3)$$

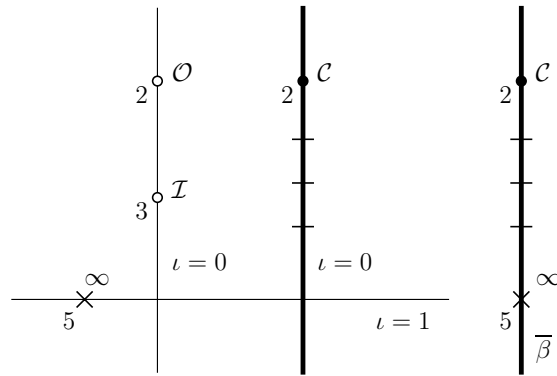
par conséquent

$$\begin{aligned} \psi(\pi X) &= (\pi X)^2(\pi X - \pi u_1)(\pi X - \pi u_2)(\pi X - \pi u_3) \\ &= \pi^5 X^2(X - u_1)(X - u_2)(X - u_3) \end{aligned}$$

On voit ainsi d'où vient la puissance 5 : il y a, en comptant les multiplicités, 5 sommets se réduisant sur le sommet central C de coordonnée 0 dans ce modèle. Comme on est assuré que le modèle β est bien primitif, on peut calculer $\iota(\beta)$: en notant $\pi = 5^{1/3}$,

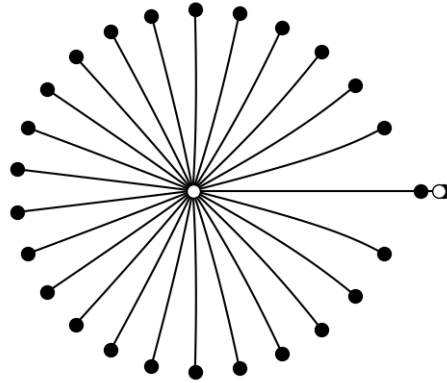
$$\begin{aligned} \beta' &= 5^{-5/3} 5^{1/3} f'(5^{1/3} X) \\ &= 5^{-4/3} 5 (5^{1/3} X) (5^{1/3} X - 2) (5^{1/3} X + 3)^2 \\ &= X (5^{1/3} X - 2) (5^{1/3} X + 3)^2 \end{aligned}$$

par conséquent $\iota(\beta) = 0$ ie $\bar{\beta}$ est séparable (géométriquement cela se voit via $e_{\bar{\beta}} = 2$ non divisible par 5). Voir la figure ci-dessous pour une synthèse :



2. EXEMPLES AVEC L'ARBRE DE BELYI $B_{25,2}$

Nous étudions maintenant un autre arbre de Belyi. On étudie l'arbre $B_{25,2}$:



On étudie ce dessin toujours modulo 5.

- Dans un des modèles séparant les deux sommets blancs :

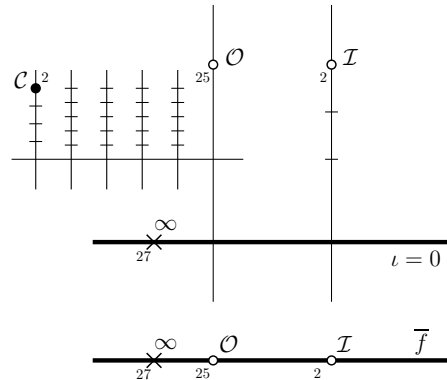
Une équation possible de ce modèle est :

$$f(X) = X^{25}(1 - X)^2$$

Ce modèle étant primitif on peut calculer le nombre $\iota(f)$ directement :

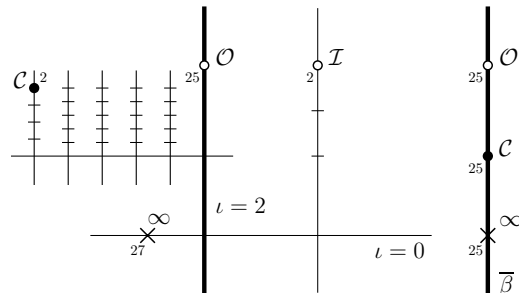
$$\begin{aligned} f'(X) &= (25(1 - X) - 2X)X^{24}(1 - X) \\ &= (25 - 27X)X^{24}(1 - X) \end{aligned}$$

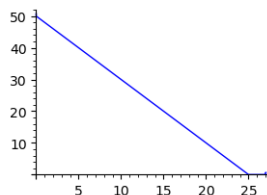
on a ainsi $\iota(f) = 0$ ie f est séparable (géométriquement $e_{\bar{1}} = 2$ donc il y a un indice de ramification non divisible par $p = 5$).



- Sur une branche séparant les deux valeurs critiques :

Plus précisément la branche dans laquelle les sommets \mathcal{O} et \mathcal{C} sont entiers : Pour cela on part du modèle f précédent. Pour étudier la proximité du sommet \mathcal{O} de coordonnée 0 et des antécédents de l'autre valeur critique $\lambda = \frac{25^{25}2^2}{27^{27}}$, on étudie les valuations des racines de $f(X) - \lambda$ par le polygone de Newton de $f(x) - \lambda$ (ci-dessous).





On procède donc à un éclatement d'épaisseur 2. Pour rendre ce modèle primitif il convient alors de diviser ce modèle par 5^{25} car (voir dernier exemple de l'arbre précédent) il y a 25 sommets noirs se réduisant sur \mathcal{O} :

$$\beta = 5^{-25} f(5^2 X) = X^{25} (1 - 25X)^2$$

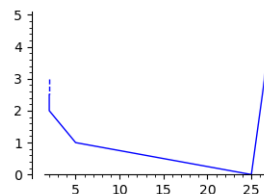
On calcule alors le contenu de β' :

$$\begin{aligned} \beta' &= (25(1 - 25X) - 2 \times 25X) X^{24} (1 - 25X) \\ &= 25(1 - 27X) X^{24} (1 - 25X) \end{aligned}$$

ce qui établit donc que $\iota(\beta) = 2$.

On pourrait également établir que le ι de l'autre branche séparant les valeur critique (celle dans laquelle \mathcal{J} est entier) a un ι nul, mais cela est rendu évident par le fait que dans ce modèle on a l'indice de ramification $e_{\mathcal{J}} = 2$ donc la réduction est séparable donc $\iota = 0$. Il en va de même de toutes les branches extrémales du modèle stable. Il ne reste qu'une branche de ce modèle. Nous l'étudierons via la formule de passage, mais d'ores et déjà SageMath nous permet de calculer son ι . La code suivant nous rappelle que l'éclatement à partir de β doit être d'épaisseur $1/20$ (déjà connu via l'article [1]) :

```
beta_F=x^25*(1-25*x)^2
beta2_F=(beta_F.subs(x=1/27+x)-2^2/27^27).expand()
plot(Pol0(beta2_F).newton_polygon(), figsize=3)
```



Le code suivant donne alors le contenu de

$$\gamma = \pi^{-25} \beta \left(\frac{1}{27} + \pi X \right) - \frac{2^2}{27^{27}}$$

où π est une racine 20ième de p .

```
L.<pi>=Qp(5).ext(x^20-5)
X=x.polynomial(L)
gamma=Pol0(beta2_F).subs(x=pi*X)/pi^25
min([x.valuation() for x in diff(gamma).coefficients()])
```

Ce code nous donne une valuation de 17 soit $\frac{17}{20}$ après normalisation. On voit ainsi que

- Les nombre ι ne sont pas tous entiers
- Les nombres ι ne sont pas systématiquement égaux aux valuations des indices de ramification des points ramifiés, contrairement à ce qu'aurait pu laisser penser les premiers exemples.

3. FORMULE DE PASSAGE

Nous établissons ici une formule pour le calcul des nombres ι pour des modèles successifs dans le modèle stable. A partir d'un modèle polynomial primitif f on pose pour toute racine entière a de f ,

$$\beta = \pi^{-e_{\bar{a}}} f(a + \pi X)$$

où $e_{\bar{a}}$ est choisi de telle sorte que β soit également primitif. Déterminons $e_{\bar{a}}$:

$$f(a + \pi X) = \prod_i (a + \pi X - a_i)^{e_i}$$

où les a_i sont les points au-dessus de 0. On a alors

$$f(a + \pi X) = \prod_i (\pi X + a - a_i)^{e_i}$$

En notant $a - a_i = u_i p^{d_i}$ on a alors

$$\begin{aligned} f(a + \pi X) &= \prod_i (\pi X + u_i p^{d_i})^{e_i} \\ &= \prod_{i \text{ tq } d_i > 0} (\pi X + u_i p^{d_i})^{e_i} \prod_{j \text{ tq } d_j \leq 0} (\pi X + u_j p^{d_j})^{e_j} \end{aligned}$$

donc si $\boxed{v(\pi) \leq \inf_i \{d_i > 0\}}$ alors pour tout i ,

$$f(a + \pi X) = \pi^{i \text{ tq } a_i \rightsquigarrow a} \sum e_i R(X) \text{ avec } R(X) \text{ primitif}$$

on a donc $\boxed{e_{\bar{a}} = \sum_{i \text{ tq } \bar{a}_i = \bar{a}} e_i}$: c'est la somme des indices de ramification des points de la fibre nulle qui se réduisent sur a . C'est également l'indice de ramification de \bar{a} dans la réduction \bar{f} .

Remarque. si la troisième valeur critique λ se réduit sur 0 alors $e_{\bar{a}}$ est également la somme des indices de ramification des points de la fibre de λ se réduisant sur a .

Remarque. Si on raisonne géométriquement, si P est le point de coordonnée a dans le modèle f , alors $e_{\bar{p}}$ sera relatif à un modèle. Il conviendrait donc de la noter par exemple $e_f(\bar{P})$.

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \beta' &= \pi^{-e_{\bar{a}}} \pi f'(a + \pi X) \\ &= \pi^{1-e_{\bar{a}}} \iota(f) \prod_j (a + \pi X - b_j)^{f_j-1} \end{aligned}$$

où les b_j sont tous les points de ramification de f , d'indices de ramification f_j , d'où

$$\begin{aligned} \beta' &= \pi^{1-e_{\bar{a}}} \iota(f) \prod_j (\pi X + a - b_j)^{f_j-1} \\ &= \pi^{1-e_{\bar{a}}} \iota(f) \prod_{j \text{ tq } d_j > 0} (\pi X + u_j p^{d_j})^{f_j-1} \prod_{d_j \leq 0} (\pi X + u_j p^{d_j})^{f_j-1} \end{aligned}$$

donc si $v(\pi) \leq \inf_j \{d_j > 0\}$, alors pour tout j ,

$$\beta' = \iota(f) \pi^{1-e_{\bar{a}}} \pi^{j \text{ tq } b_j \rightsquigarrow a} \sum f_j-1 R(X) \text{ avec } R(X) \text{ primitif.}$$

On obtient donc $\boxed{\iota(\beta) = \iota(f) - \delta(a) v(\pi)}$ où $\boxed{\delta(a) = e_{\bar{a}} - 1 - \left(\sum_{j \text{ tq } b_j \rightsquigarrow a} f_j - 1 \right)}$.

En termes plus géométrique, si P est de coordonnées a dans le modèle f ,

$$\begin{aligned} \iota(\beta) &= \iota(f) - \delta_f(P)v(\pi) \\ \delta_f(P) &= e_f(\bar{P}) - 1 - \underbrace{\sum_{L \rightsquigarrow_f P} (e(L) - 1)}_{\mathcal{D}_f(P)} \end{aligned}$$

On a noté ci-dessus $L \rightsquigarrow_f P$ pour : le point L se réduit sur le point P dans le modèle f .

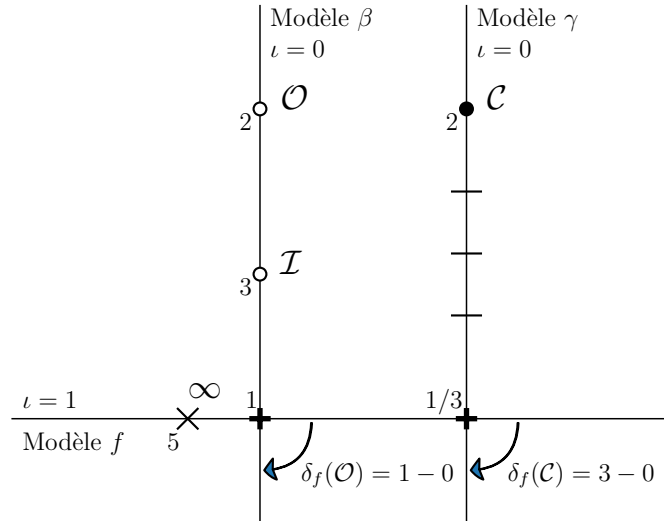
Remarquons que la somme $\mathcal{D}_f(P)$ ne fait normalement intervenir que des points de ramification, mais que l'on peut prendre en fait tous les points $R \rightsquigarrow$ car si $e(R) = 1$ alors $e(R) - 1 = 0$.

Reformulons cette somme :

$$\begin{aligned} \delta_f(P) &= e_f(\bar{P}) - 1 - \mathcal{D}_f(P) \\ &= \left(\sum_{\substack{Q \rightsquigarrow_f P \\ Q, P \text{ ds m\^eme fibre}}} e(Q) \right) - 1 - \sum_{\substack{Q \rightsquigarrow_f P \\ Q, P \text{ ds m\^eme fibre}}} (e(Q) - 1) - \sum_{\substack{R \rightsquigarrow_f P \\ R \text{ ds l'autre fibre}}} (e(R) - 1) \\ &= -1 + \# \left\{ \begin{array}{l} Q \rightsquigarrow P \text{ dans le modèle } f \\ Q \text{ dans la m\^eme fibre que } P \end{array} \right\} - \sum_{\substack{R \rightsquigarrow_f P \\ R \text{ ds l'autre fibre}}} (e(R) - 1) \\ &= \boxed{\# \left\{ \begin{array}{l} Q \rightsquigarrow P \text{ dans le modèle } f \\ Q \text{ dans la m\^eme fibre que } P \\ Q \neq P \end{array} \right\} - \sum_{\substack{R \rightsquigarrow_f P \\ R \text{ ds l'autre fibre}}} (e(R) - 1)}. \end{aligned}$$

4. ILLUSTRATION À TRAVERS L'ARBRE $B_{3,2}$

On résume les données arithmétiques (modulo 5) de l'arbre $B_{3,2}$ dans le diagramme du modèle stable suivant :

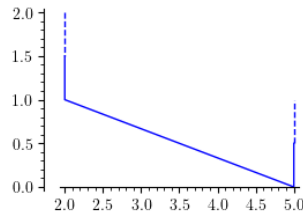


Quelques détails :

- L'épaisseur de l'éclatement de f à β est 1 car dans le modèle f ,

$$d(\mathcal{O}, \mathcal{I}) = v(3 - (-2)) = v(5) = 1.$$

- L'épaisseur de l'éclatement de f à γ est $\frac{1}{3}$ car le polygone de Newton de $f(X) - (-2)^2 3^3$ est :



- On a $\delta_f(\mathcal{O}) = 1 - 0 = 1$ car $\#\{Q \rightsquigarrow \mathcal{O}\} = \#\{\mathcal{I}\} = 1$ et comme les deux valeurs critiques sont séparées modulo 5 dans ce modèle alors $\sum_{R \rightsquigarrow \mathcal{O}} e(R) - 1 = 0$.
- On a $\delta_f(\mathcal{C}) = 3 - 0 = 3$ car $\#\{Q \rightsquigarrow \mathcal{C}\} = 3$ (voir polygone de Newton) et $\sum_{R \rightsquigarrow \mathcal{C}} e(R) - 1 = 0$ car les valeurs critiques sont séparées dans la réduction de f .

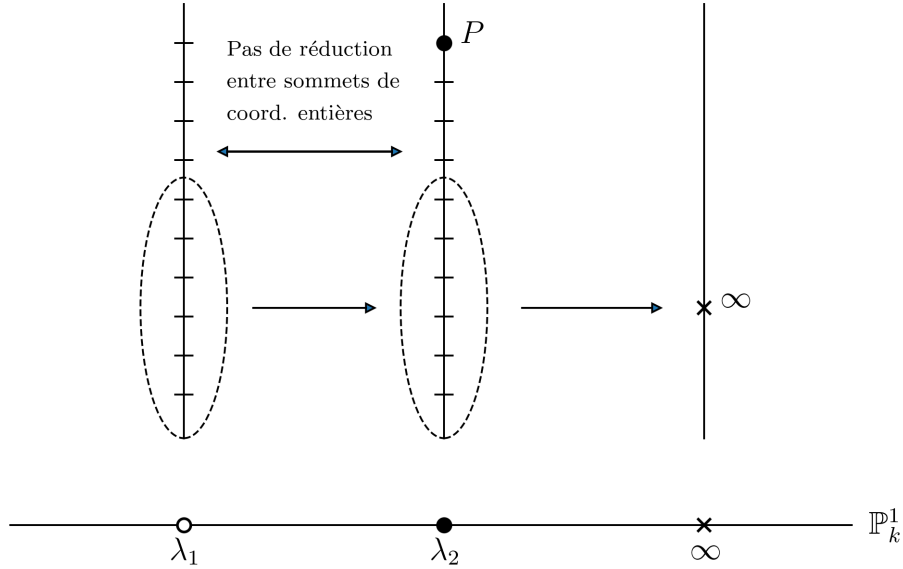
On vérifie ainsi que la formule de passage est correcte :

$$\iota(\beta) = \iota(f) - \delta_f(\mathcal{O})v(\pi_{f \rightarrow \beta}) \iff 0 = 1 - 1 \times 1$$

$$\iota(\gamma) = \iota(f) - \delta_f(\mathcal{C})v(\pi_{f \rightarrow \gamma}) \iff 0 = 1 - 3 \times \frac{1}{3}$$

5. CONSÉQUENCE DE LA FORMULE DE PASSAGE

Si les 2 valeurs critiques λ_1 et λ_2 sont séparées dans un certain modèle β alors dans ce modèle :



Cela vient du fait que des relations $\beta(a) = \lambda_1$ et $\beta(b) = \lambda_2$ se réduisent en $\overline{\beta(\overline{a})} = \overline{\lambda_1}$ et $\overline{\beta(\overline{b})} = \overline{\lambda_2}$ donc si $\overline{\lambda_1} \neq \overline{\lambda_2}$ il est impossible que $\overline{a} = \overline{b}$.

Remarque. Ce passage au quotient n'est possible que si les coordonnées a, b et les valeurs critiques λ_1 et λ_2 sont entières.

Remarque. Dans le cas où l'une des valeurs critiques λ_2 n'est pas entière alors on aura également pas de réduction entre les sommets des 2 fibres critiques car les coordonnées des sommets au-dessus de λ_2 sont nécessairement tous non entiers (β étant à coefficient entiers on ne peut avoir $\beta(b) = \lambda_2 \notin \mathcal{O}_K$ si $b \in \mathcal{O}_K$).

Dans un tel modèle (si $\overline{\lambda_1} \neq \overline{\lambda_2}$ ou $\lambda_1 \in \mathcal{O}_K$ et $\lambda_2 \notin \mathcal{O}_K$ ou $\lambda_1 \notin \mathcal{O}_K$ et $\lambda_2 \in \mathcal{O}_K$), pour tout point P de coordonnées entières on aura $\sum_{R \rightsquigarrow P} e(R) - 1 = 0$ car il n'y a pas de $R \rightsquigarrow P$.

Il s'en suit que

$$\delta_f(P) = \# \left\{ \begin{array}{l} Q \rightsquigarrow_f P \\ Q \text{ dans la même fibre que } P \\ Q \neq P \end{array} \right\}.$$

Par conséquent $\delta_f(P) \geq 0$.

D'après la formule de passage, on aura donc que pour tout modèle γ issu de l'éclatement de β (on dira γ en aval de β), $\iota(\gamma) < \iota(\beta)$. Comme pour les modèles en aval de β on aura également que les valeurs critiques se réduisent séparément alors on pourra dire que à partir du moment que les valeurs critiques sont séparées les nombres ι décroissent strictement. C'est la raison pour laquelle on pourrait appeler $\iota(\beta)$ la **profondeur** de β .

6. LE POINT SUR LES MODÈLES DE L'ARBRE DE BELYI $B_{a,b}$ ($v(b) \leq v(a)$)

- Le modèle $f = X^a \left(\frac{n}{b} - X\right)^b$ (équivalent si $v(b) = 0$ à $(X - a)^a (X + b)^b$) :

Ce modèle est le modèle dans lequel les sommets \mathcal{O} , \mathcal{I} et \mathcal{E} ne se réduisent pas sur ∞ , c'est également également **le modèle dans lequel tous les sommets sont entiers** (voir article). Dans ce modèle la réduction est de degré maximal égal à $n = a + b$ (mais ce n'est pas forcément le seul modèle ayant cette propriété. Dans ce modèle,

$$\begin{aligned} f' &= \left(a \left(\frac{n}{b} - X\right) - bX\right) X^{a-1} \left(\frac{n}{b} - X\right)^{b-1} \\ &= n \left(\frac{a}{b} - X\right) (X - a)^{a-1} (X + b)^{b-1} \end{aligned}$$

donc $\iota(f) = v(n)$.

- Le modèle $\beta = X^a (1 - X)^b$:

Ce modèle est **le modèle dans lequel les sommets \mathcal{O} et \mathcal{I} ne se réduisent pas l'un sur l'autre**. Dans ce modèle,

$$\begin{aligned} \beta' &= (a(1 - X) - bX) X^{a-1} (1 - X)^{b-1} \\ &= (a - nX) X^{a-1} (1 - X)^{b-1} \end{aligned}$$

donc $\iota(\beta) = \min\{v(a), v(n)\}$.

On a $f \sim \beta$ si et seulement si $v(n) = v(a)$ car

$$\beta = f \left(\frac{n}{b} X\right) \left(\frac{b}{n}\right)^n.$$

- Le modèle $\varphi = X^a \left(\frac{n}{b} - \frac{a}{b} X\right)^b$ (on suppose que $v(a) \geq v(b)$) :

C'est **le modèle dans lequel les 2 valeurs critiques ne se réduisent pas l'une sur l'autre**. Dans ce modèle,

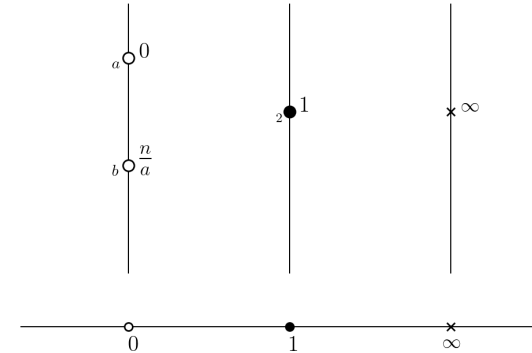
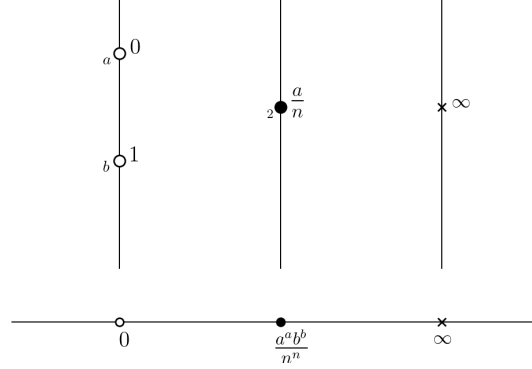
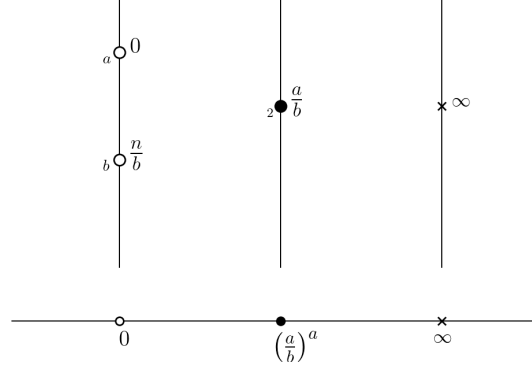
$$\begin{aligned} \varphi' &= \left(a \left(\frac{n}{b} - \frac{a}{b} X\right) - b \frac{a}{b} X\right) X^{a-1} \left(\frac{n}{b} - \frac{a}{b} X\right)^{b-1} \\ &= \frac{an}{b} (1 - X) X^{a-1} \left(\frac{n}{b} - \frac{a}{b} X\right)^{b-1} \end{aligned}$$

donc $\iota(\varphi) = v(a) + v(n) - v(b)$.

On a $\varphi = \beta \left(\frac{a}{n} X\right) \frac{n^n}{a^a b^b}$ donc $\varphi \sim \beta$

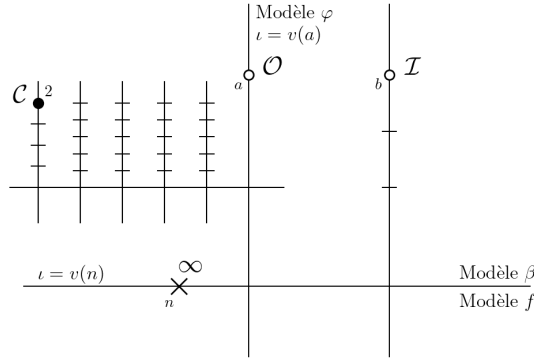
si et seulement si $v(a) = v(n)$. On a $\varphi = f \left(\frac{a}{b} X\right) \left(\frac{b}{a}\right)^a$ donc $\varphi \sim f$ si et seulement si $v(a) = v(b)$.

Comme nous l'avons vu, à partir de ce modèle (ie pour tous les modèles en aval) on a pour tout point P à coordonnées entières $\delta(P) \geq 0$ donc les nombres ι décroissent.

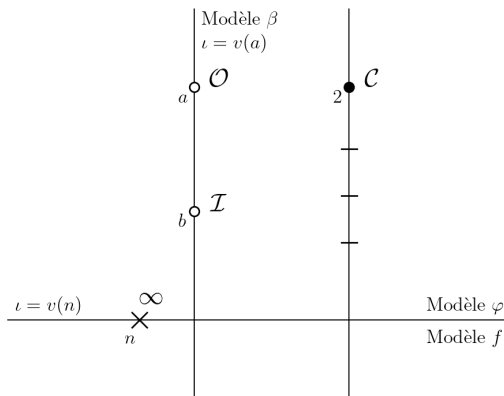


En bilan, on a donc trois cas de figure :

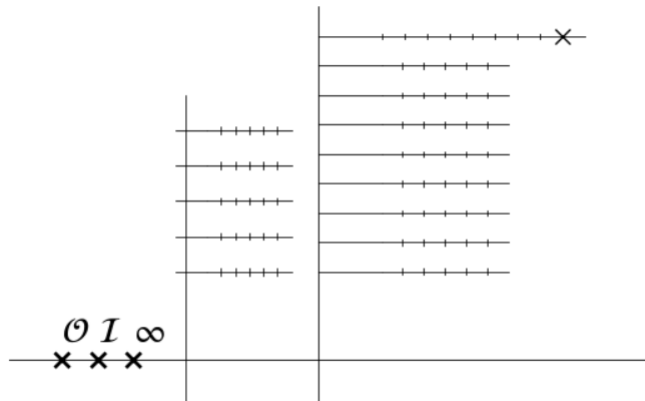
- Soit $v(a) > v(n)$ ie $v(a) > v(b)$ (et alors $v(a) > v(n) = v(b)$) alors $\beta \sim f$ et $\iota(\beta) = \iota(f) = v(n)$, $\iota(\varphi) = v(a)$. A noter qu'alors φ ne sera pas le seul modèle en aval de f dans lequel les valeurs critiques se réduisent séparément : il y a également le modèle dans lequel \mathcal{I} est entier.



- Soit $v(a) < v(n)$ ie $v(b) < v(n)$ (et alors $v(a) = v(b) < v(n)$) alors $\varphi \sim f$ et $\iota(\varphi) = \iota(f) = v(n)$, $\iota(\beta) = v(a)$. Dans ce cas il y a donc un unique "premier modèle" à valeurs critiques séparées.



- Soit $v(a) = v(n)$ ie $v(b) = v(n)$ (et alors $v(a) = v(b) = v(n)$). Alors $\varphi \sim \beta \sim f$ et $\iota = v(n) = v(b) = v(a)$.

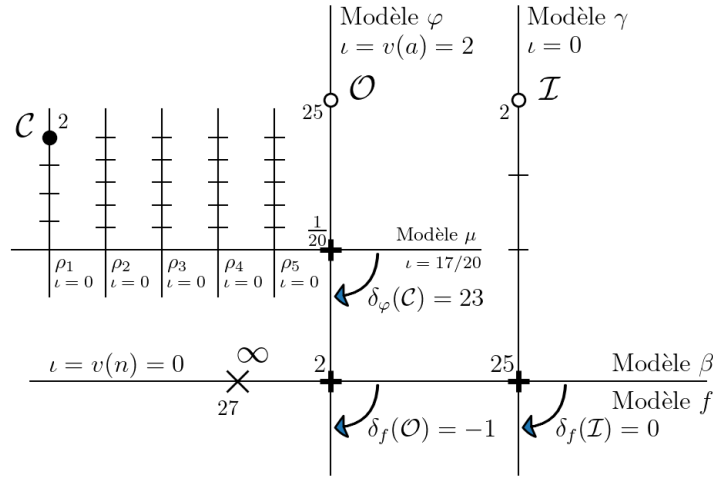


7. RETOUR SUR L'ARBRE $B_{25,2}$

Comme dans ce cas $v(a) = v(25) = 2 > v(n) = v(27) = 0$ alors $f = \beta$ et il y a 2 modèles à valeurs critiques séparées dont φ . On peut le vérifier ici directement :

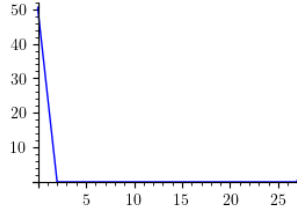
$$f = X^{25} \left(\frac{27}{2} - X \right)^2 \text{ et } \beta = X^{25} (1 - X)^2$$

et $f \sim \beta$ car $\beta = f \left(\frac{27}{2} X \right) \sim f$ car $\frac{27}{2} \in \mathcal{O}_K^*$. L'article [1] est plus précis et donne le diagramme suivant (auquel on a rajouté les informations glanées dans ce papier) :



Quelques détails :

- L'épaisseur de l'éclatement de f à γ est 1 car le polygone de Newton de $f(X) - 25^{25} 2^2$ est



- On a $\delta_f(\mathcal{O}) = -1$ car $\#\{Q \rightsquigarrow \mathcal{O}\} = 0$ et $\sum_{R \rightsquigarrow \mathcal{O}} e(R) - 1 = e(\mathcal{C}) - 1 = 1$.
- On a $\delta_f(\mathcal{I}) = 0$ car $\#\{Q \rightsquigarrow \mathcal{I}\} = 0$ et $\sum_{R \rightsquigarrow \mathcal{I}} e(R) - 1 = 0$ car les seuls $R \rightsquigarrow \mathcal{I}$ ne sont pas ramifiés.
- On a $\delta_\varphi(\mathcal{C}) = 23$ car $\#\{Q \rightsquigarrow \mathcal{C}\} = 23$ et $\sum_{R \rightsquigarrow \mathcal{C}} e(R) - 1 = 0$ car les valeurs critiques sont séparées.

On peut ainsi vérifier la formule de passage avec $\iota(\varphi)$ et $\iota(\gamma)$:

$$\iota(\varphi) = \iota(f) - \delta_f(\mathcal{O}) v(\pi_{f \rightarrow \varphi}) = 0 - (-1) \times 2 = 2$$

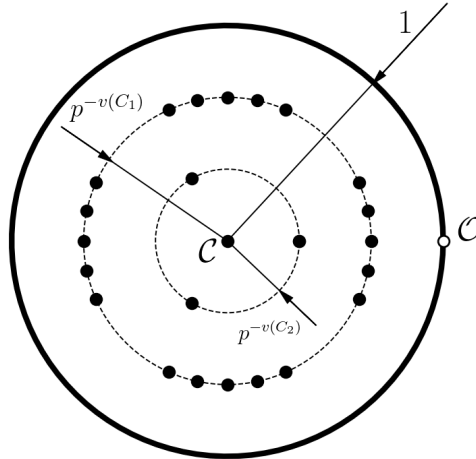
$$\iota(\gamma) = \iota(f) - \delta_f(\mathcal{I}) v(\pi_{f \rightarrow \gamma}) = 0 - 0 \times 1 = 0$$

et on peut calculer $\iota(\mu)$ par la formule de passage :

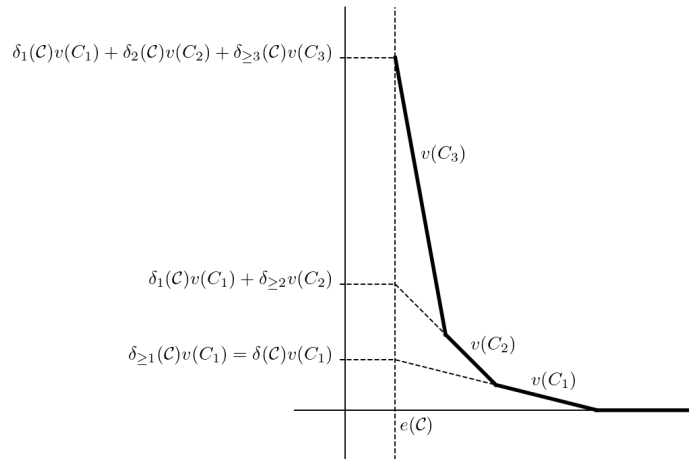
$$\iota(\mu) = \iota(\varphi) - \delta_\varphi(\mathcal{C}) v(\pi_{\varphi \rightarrow \mu}) = 2 - 23 \times \frac{1}{20} = \frac{17}{20}$$

Pour la vérification des $\iota(\rho_i) = 0$ avec la formule de passage, on pourra utiliser une généralisation de cette dernière pour ne pas avoir à calculer le $v(\pi_{\mu \rightarrow \rho_i})$ (qui ne sont au deumeurant pas bien compliquer ici, c'est $\frac{1}{3} - \frac{1}{20}$). En raisonnant comme dans la section sur la formule de passage on peut établir qu'en général si un modèle ρ est en aval de φ issu de l'éclatement d'un point \mathcal{C} alors

$$\iota(\rho) = \iota(\varphi) - \delta_1(\mathcal{C})v(C_1) - \delta_2(\mathcal{C})v(C_2) - \dots - \delta_{\geq i}(\mathcal{C})v(C_i)$$



Dans le cas où le modèle φ est à valeurs critiques séparées, cela se traduit graphiquement sur le polygone de Newton de $\varphi(a + X)$ par :



⚠ Attention, ici il est important que les sommets autres que \mathcal{C} soient simples car sinon les δ ne sont pas les Δx des différentes pentes du polygone.

Dans notre cas d'après le polygone de Newton,

$$\begin{aligned} \iota(\rho_1) &= \iota(\mathcal{C}) - \delta_1(\mathcal{C})v(C_1) - \delta_{\geq 2}(\mathcal{C})v(C_2) \\ &= 2 - 20 \times \frac{1}{20} - 3 \frac{1}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

8. COMPLÉMENT SUR LE NOMBRE ι

A voir également :

- Sur le lien entre ι et profondeur/degre d'inséparabilité : voir le document de travail sur les arbres de Bezout (ou arbres à deux branches ou arbre β).

RÉFÉRENCES

- [1] Soranzo GABRIEL. *Semi-stable model of Belyi children's drawings*. Avr. 2022. DOI : 10.5281/zenodo.6427559.

Email address: gabriel.soranzo@u-pec.fr