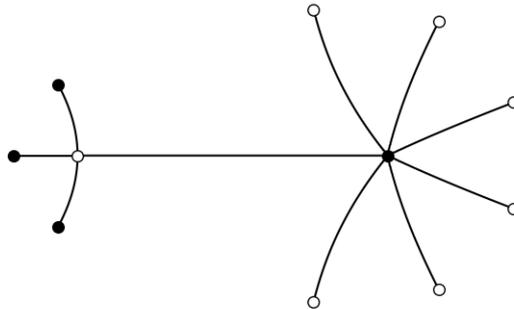


ARBRES DE BEZOUT - PREMIERS RÉSULTATS

RÉSUMÉ. Premiers résultats sur les arbres de Bezout (que l'on pourrait appeler arbre à deux branches ou arbres beta). On étudie ici le cas $\iota = 0$ c'est-à-dire la bonne réduction, et partiellement le cas $\iota = 1$. On poursuit par ailleurs l'étude du nombre ι .

1. PRÉSENTATION DE L'ARBRE DE BEZOUT

Cet arbre est l'arbre à deux branches dont voici un exemple :



Que l'on pourra noter $D_{4,7}$ où 4 et 7 sont les deux indices de ramification des sommets ramifiés. On l'appelle arbre de Bezout car on peut trouver son équation via la relation de Bezout. Si les deux points de ramification sont 0 pour le sommet blanc \mathcal{B} ramifié et 1 pour le sommet noir ramifié \mathcal{N} et qu'ils sont respectivement d'indices a et b alors il existera deux polynômes P et Q tels que

$$x^a P(x) = 1 + (1-x)^b Q(x).$$

Cela revient à la relation de Bezout

$$x^a P(x) + (x-1)^b Q(x) = 1.$$

On pourra donc trouver les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ avec l'algorithme d'Euclide.

Une autre manière d'obtenir l'équation est de passer par la dérivée. Comme les points \mathcal{B} et \mathcal{N} sont les seuls points ramifiés alors une équation ψ de l'arbre vérifiera $\psi' = x^{a-1}(1-x)^{b-1}$. On aura ainsi un modèle ψ primitive de $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$. Les valeurs critiques de ψ seront alors 0 et λ l'intégrale de $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ entre 0 et 1. Ce calcul a déjà été fait dans [3], mais c'est un calcul déjà connu par ailleurs en probabilité. En effet $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est la densité de la loi β et le coefficient de normalisation est $C_{a,b} = \Gamma(a+b)/(\Gamma(a)\Gamma(b))$ (voir par exemple [1]). Ainsi un modèle de valeurs critiques 0 et 1 sera

$$(1) \quad \varphi = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

En théorie des probabilité, cette fonction s'appelle la fonction bêta incomplète incomplète normalisée, parfois notée $I_x(a, b)$. On notera que $C_{a,b} = 1/B(a, b)$ où B est la fonction bêta. Il est démontré que

$$\varphi = I_x(a, b) = \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}.$$

Il s'en suit que le modèle φ est entier, et donc dans \mathbb{Q}_p pour tout p . Par ailleurs, comme $\varphi(1) = 1$ et que φ est entier alors ce modèle est primitif, car sinon on aurait $v(\varphi(1)) > 0$. La primitivité du modèle étant vérifiée et comme $\varphi' = C_{a,b} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ alors (voir [2]) on aura

$$v(\varphi) = v\left(\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right)$$

En bilan :

Théorème 1. *Un modèle entier et primitif de l'arbre de Bezout d'indices de ramification a et b respectifs aux points ramifiés blanc \mathcal{B} et noir \mathcal{N} (donc d'indice $n = a + b - 1$ en ∞) est le modèle*

$$\varphi = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

Ce modèle a pour valeurs critique 0 pour le point ramifié \mathcal{B} de coordonnée 0 et 1 pour le point ramifié \mathcal{N} de coordonnée 1.

Ce modèle est donc à valeurs critiques séparées, et a pour profondeur :

$$v(\varphi) = C_{a,b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!}$$

2. BONNE RÉDUCTION DE L'ARBRE

Le modèle entier et primitif φ permet d'étudier la bonne réduction éventuelle de l'arbre. Nous allons démontrer une CNS de bonne réduction.

Théorème 2. *L'arbre de Bezout d'indices de ramification a et b aura bonne réduction modulo p si et seulement si p ne divise pas le nombre $C_{a,b} = \Gamma(a+b)/(\Gamma(a)\Gamma(b))$.*

Nous utiliserons ici la notion de nombre ι déjà évoqué dans [2] bien que l'on puisse sans doute s'en passer. On raisonne par double implication :

- Si l'arbre a bonne réduction alors le modèle φ à valeurs critiques séparées n'a pas de profondeur (il n'a pas de modèle en aval dans le modèle stable) donc $\iota(\varphi) = 0$ ie d'après les observation de la section précédente $v\left(\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right) = 0$ d'où la conclusion.
- Si $v(C_{a,b}) = 0$ alors $\iota = 0$ donc le modèle φ n'a pas de profondeur. Il suffit alors pour pouvoir conclure, de montrer que ∞ "est dans le modèle" c'est-à-dire que ∞ est entier dans ce modèle. En termes de polygone de Newton, cela revient à vérifier que la valuation du coefficient de x^n est inversible. Mais d'après la formule 1 et d'après notre hypothèse $C_{a,b}$ est un inversible de \mathbb{Q}_p donc on peut supposer que

$$\varphi = \int x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \int \dots \pm x^{n-1} = \dots + \frac{x^n}{n}.$$

Il s'en suit que comme le modèle φ est entier alors $v(n) = 0$ et le coefficient de x^n est donc inversible.

Par exemple pour $a = 3$ et $b = 4$ on a $C_{a,b} = \Gamma(7)/(\Gamma(3)\Gamma(4)) = 6!/(2!3!) = 60$ donc l'arbre se réduira mal modulo 2, 3 et 5. Cela est remarquable modulo 5 car aucun des indices de ramification n'est divisible par 5 : il n'y a pas de ramification sauvage modulo 5. Cela n'aurait pas été possible pour l'arbre de Belyi, qui a mauvaise réduction si et seulement s'il a une ramification sauvage (éventuellement en ∞).

Remarquons enfin que

$$(2) \quad \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = n \binom{n-1}{a-1} = a \binom{n}{a} = b \binom{n}{b}$$

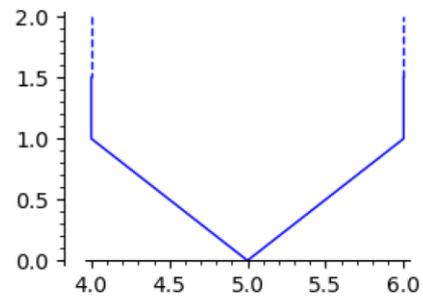
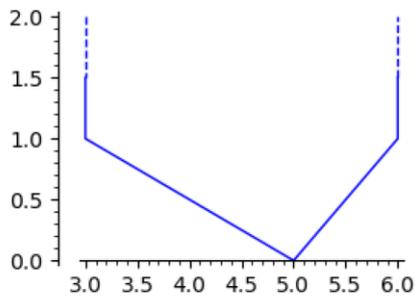
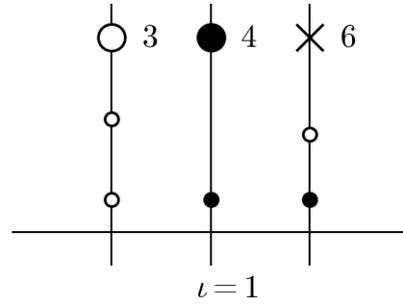
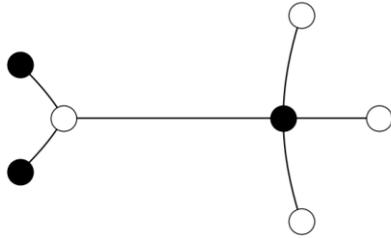
ce qui a pour conséquence (un fait qui doit certainement être général) :

Proposition 1. *Dans un arbre de Bezout, si l'une des ramification (de \mathcal{B} , \mathcal{N} ou ∞) est sauvage alors il y a mauvaise réduction. De manière plus générale,*

$$\iota(\varphi) \geq \max\{v(a), v(b), v(n)\}.$$

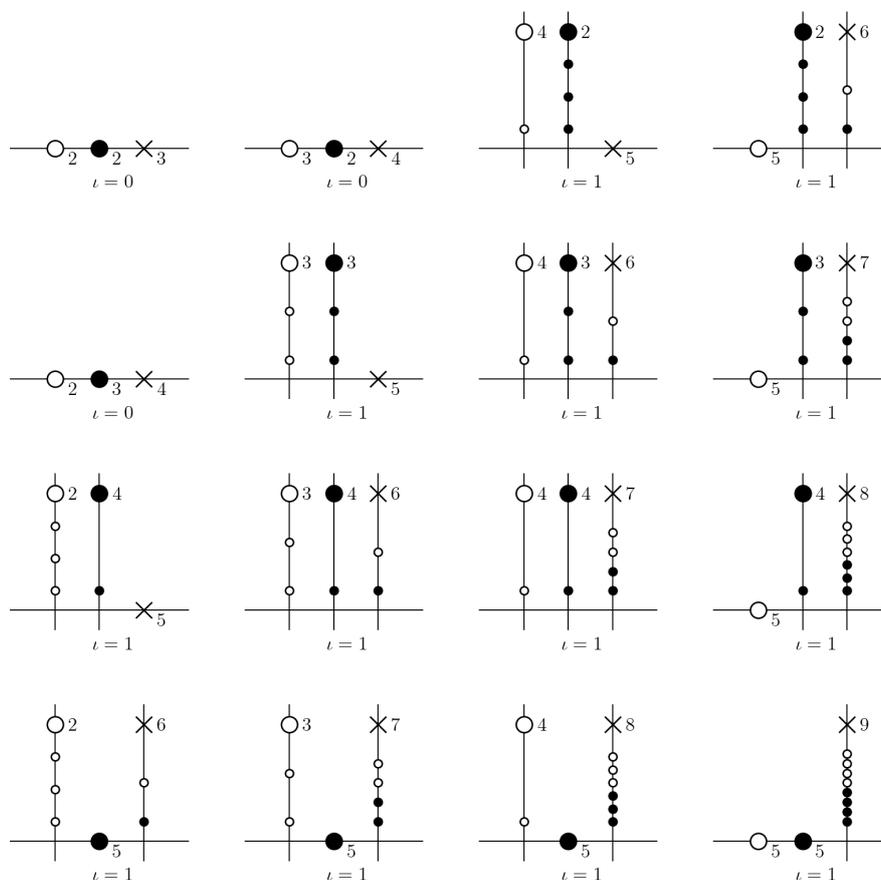
3. PREMIERS EXEMPLES CONCRETS

On étudie les modèles stables pour les petits arbres de Belyi en utilisant les polygones de Newton. Voici par exemple l'étude de l'arbre d'indices $a = 3$ et $b = 4$:



Pour cet arbre on a $n = 6$. Le polygone de gauche est celui de $\varphi(x)$ donc donne la proximité des sommets blancs avec le sommet ramifié blanc et ∞ , tandis que le polygone de droite est celui de $\varphi(1-x) - 1$ donc donne la proximité des sommets noirs avec le sommet ramifié noir.

On peut systématiser cette étude, ce qui donne les modèles suivants :



On peut alors facilement conjecturer la structure générale du modèle stable des dessins de Bezout dans le cas $\iota(\varphi) = 1$:

Conjecture fautive 1. Dans l'hypothèse où $\iota(\varphi) = 1$, si $v(a) \neq 0$ alors dans le modèle φ le point \mathcal{B} se réduira avec des points simples (blancs), en nombre le reste de $-a$ modulo p . Idem pour $v(b)$ et le point \mathcal{N} . Enfin si $v(n) > 0$ le sommet ∞ se réduira avec des points blancs et noirs en même nombre (c'est toujours le cas) et en nombre le reste de n modulo p . Il s'en suit (par minimalité du modèle) que si $v(a) = \iota(\varphi) = 1$ alors le point \mathcal{B} est "sur le modèle" (ie aucun autre point ne se réduit sur lui) et idem pour $v(b)$ et le point \mathcal{N} .

Conjecture 1. La conjecture précédente peut être fautive lorsque les intervalles $[a, n]$ et $[b, n]$ contiennent de plus grande puissance de p . La bonne conjecture, encore imprécise, est que le nombre de points se réduisant sur \mathcal{B} est le reste de $-a$ modulo un p^k tel que $[a, n]$ contient un multiple de p^k . La question reste ouverte de quel est le k . En tout cas, le k est le même pour le point \mathcal{N} et le point ∞ . Voir dans une section ci-dessous la description général du polygone de Newton de φ et $\varphi(1 - X) - 1$.

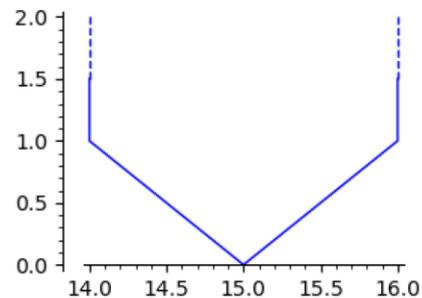
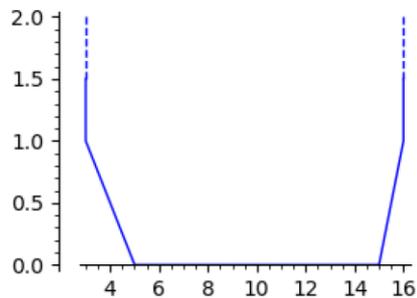
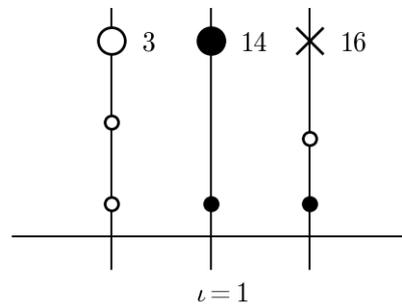
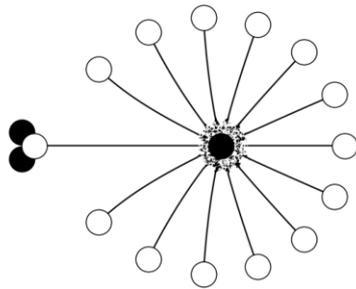
Cette conjecture découle de l'observation des polygones de Newton :

- si $v(a) = 0$ alors on voit que le premier point est $(a, 1)$ et le suivant $(pq, 0)$ avec pq le multiple de p immédiatement supérieur à a ;
- si $v(a) = 1$ (rappelons que l'on a nécessairement $v(a) \leq \iota$) alors le premier point est $(a, 0)$;
- si $v(n) = 0$ alors le dernier point est $(n, 1)$ et le précédent est $(pk, 0)$ avec pk le multiple de p immédiatement inférieur à n ;

- si $\nu(n) = 1$ (même remarque) alors le dernier point est $(n, 0)$.

Remarquons enfin qu'il y a assez de points disponibles car le nombre de points (par exemple) blanc est $b = n - a + 1$ donc le nombre d'abscisse entière entre a et n , or les points utilisés dans les modèles sont justement "pris" entre a et n , ainsi que l'on peut le voir sur la figure page précédent ou page suivante.

Attention cependant, il peut y avoir de (nombreux) points simples qui ne se réduisent sur aucun point ramifié. Considérons par exemple l'arbre de Bezout d'indices $a = 3$ et $b = 14$ (cf ci-dessous). Dans ce modèle il y a 10 points simples blancs qui ne se réduisent ni sur \mathcal{B} ni sur ∞ . Il se réduisent nécessairement entre eux car la réduction $\bar{\varphi}$ n'est pas séparable. Mais ils peuvent se regrouper par 5 ou par 10. Dans le modèle représenté ci-dessous ils n'apparaissent pas car on ne sait pas comment se fait le regroupement.



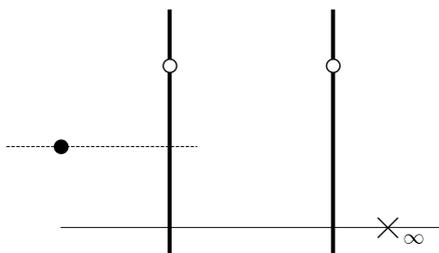
On a donc la question suivante :

Question 1. Dans le cas $\iota(\varphi) = 1$ comment se regroupent les points simples qui ne se réduisent pas sur un sommet ramifié?

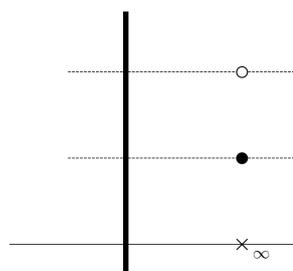
4. COMPARAISON ENTRE LES ARBRES DE BELYI ET DE BEZOUT

Les modèles stables des arbres de Belyi et de Bezout présentent la même forme générale si l'on se place du point de vue du modèle fondamental (dans lequel tous les sommets sont entiers, c'est-à-dire le modèle "contenant ∞ ") :

Modèle stable de Belyi type (lorsque $v(a) > v(n) = v(b)$) :

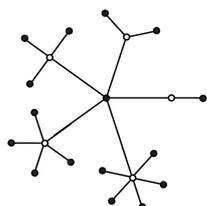


Modèle stable de Bezout type (lorsque $\iota(\varphi) > \max\{v(a), v(b), v(n)\}$) :

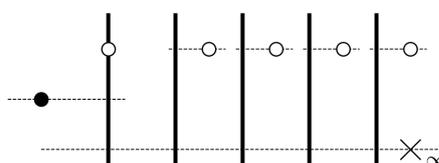


Dans ces deux exemples types les modèles en gras sont les modèles à valeurs entières et séparées. Les modèles en pointillés sont en général plus complexes. Ces deux modèles sont peut-être des cas particuliers, qui rentreraient dans le cadre de la conjecture suivante :

Conjecture 2. *Le modèle stable d'un arbre de diamètre 4 est le suivant :*



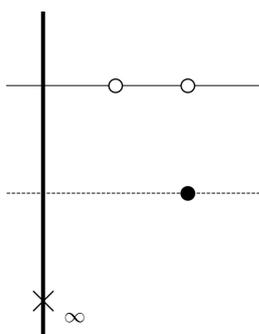
Modèle stable modulo 5



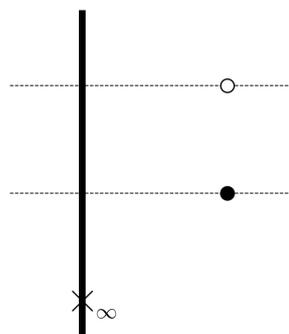
Il y a autant de modèles à valeurs critiques entières séparées que de points blancs sur la couronne. Le point noir central est entier dans le modèle contenant le point blanc ayant la ramification de valuation la plus grande (dans cette hypothèse il n'y aurait pas de différence arithmétique entre les deux bouquets de Leïla).

Revenons sur la comparaison des deux modèles stables. L'arbre de Belyi a un cas qui semble différent : le cas $v(n) > v(a)$. Dans ce cas le modèle fondamental est à valeurs critiques entières et séparées. C'est en fait le cas également le cas lorsque $\iota(\varphi) = v(n)$ comme l'illustre les deux modèles ci-dessous :

Arbre de Belyi avec $v(n) > v(a) = v(b)$:



Arbre de Bezout avec $v(n) = \iota(\varphi)$:



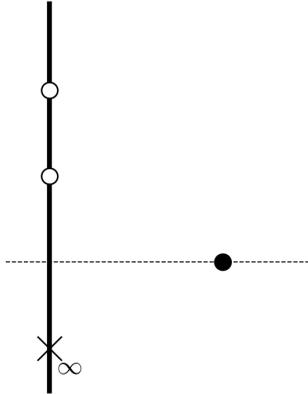
Remarquons que d'après le papier [2] dans le cas du modèle de Belyi, $\iota(\varphi) = v(a) + v(n) - v(b)$ (avec l'hypothèse $v(a) > v(b)$). Cela induit peut-être la véracité de la conjecture suivante :

Conjecture 3. *Dans le modèle stable des arbres de diamètre 4, appelons φ le modèle à valeurs critiques entières et séparées "contenant" le point blanc dont l'indice de ramification réalise le maximum des valuations (et donc "contenant" le point central d'après la conjecture 2). Si $v(n) = \iota(\varphi)$ alors ∞ "est contenu" dans φ c'est-à-dire que φ est le modèle fondamental, c'est-à-dire que tous les sommets sont entiers dans ce modèle.*

On voit ci-dessus que dans le modèle stable de l'arbre de Belyi les deux points ramifiés blancs sont dans le même modèle. Cela vient peut-être de :

Conjecture 4. *Dans le modèle stable des arbres de diamètre 4, les points blancs avec des indices de ramifications de même valuation sont dans le même modèle (c'est-à-dire sont tous deux entiers dans le même modèle à valeurs critiques entières séparées).*

N'oublions pas enfin le cas critique de l'arbre de Bezout (lorsque $v(a) = v(n) = v(b)$) :



Ce modèle semble conforme à nos conjectures précédentes : $v(n) = \iota(\varphi)$ (car $\iota(\varphi)$ est égal à $v(a) + v(n) - v(b)$ donc à $v(n)$) donc le modèle à valeurs critiques entières et séparées contient ∞ . De plus $v(a) = v(b) = \iota(\varphi)$ donc ces points ne se réduisent sur aucun autre points en suivant la logique des arbres de Bezout 1.

5. MEILLEURS COMPRÉHENSION DE $v(C_{a,b})$

D'après la conjecture 1, lorsque $\iota(\varphi) = 1$ il doit nécessairement y avoir un multiple de p entre a et n (compris) et entre b et n . Nous allons voir pourquoi cela est vrai en explicitant le calcul de $\iota(\varphi) = v(C_{a,b})$. Tout d'abord, comme

$$C_{a,b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = a \binom{n}{a} = b \binom{n}{b}$$

alors

$$\iota(\varphi) = v(a) + v \binom{n}{a} = v(b) + v \binom{n}{b} = v(n) + v \binom{n-1}{a-1}.$$

Par conséquent le calcul de ι revient au calcul des valuations des coefficients binomiaux. Ce calcul doit être connu, mais nous le refaisons ici. Pour cela on utilise l'expression

$$\binom{n}{a} = \frac{n(n-1)\dots(n-b+1)}{1 \times 2 \times \dots \times b} = \frac{a \times \dots \times n}{1 \times \dots \times b} = \frac{(1+(a-1)) \dots (b+(a-1))}{1 \times \dots \times b}$$

Ainsi $v \binom{n}{b} = v(\tau_{a-1}(\llbracket 1, b \rrbracket)) - v(\llbracket 1, b \rrbracket)$ où l'on note $v \llbracket c, d \rrbracket$ pour la somme des multiplicités des entiers de l'intervalle $\llbracket c, d \rrbracket$ et τ pour la translation :



Il ne doit pas être difficile de montrer que pour toute translation τ_d on a $v(\llbracket 1, b \rrbracket) \leq v(\tau_d(\llbracket 1, b \rrbracket))$ et que l'on aura en général égalité sauf si $\tau_d(\llbracket 1, b \rrbracket)$ rencontre un nombre de valuation plus grande que ceux présent dans $\llbracket 1, b \rrbracket$. On utilisera le vocabulaire suivant :

Définition 1. Lorsque $v(\tau_d(\llbracket 1, b \rrbracket)) > v(\llbracket 1, b \rrbracket)$ on dira qu'il y a un **accident p -adique** sur l'intervalle $\tau_d(\llbracket 1, b \rrbracket)$. La valeur de cet accident p -adique est l'écart des deux valuations :

$$Acc_p(\llbracket 1+d, b+d \rrbracket) = v(\llbracket 1+d, b+d \rrbracket) - v(\llbracket 1, b \rrbracket)$$

Un accident p -adique peut survenir de plusieurs manières. Il peut y avoir un multiple de p en plus par **décentrage** de l'intervalle, par exemple $\llbracket 1, 8 \rrbracket$ contient un seul multiple de 5 tandis que $\llbracket 2, 10 \rrbracket$ en contient 2. Il peut y avoir une apparition d'une **singularité** dans le sens qu'un multiple de p^k devienne un multiple de p^q avec $q > k$, par exemple dans $\llbracket 1, 8 \rrbracket \rightarrow \llbracket 21, 28 \rrbracket$ le multiple de 5 est devenu un multiple de 25. Il peut se passer les deux en même temps, par exemple $\llbracket 1, 8 \rrbracket \rightarrow \llbracket 18, 25 \rrbracket$ où le décentrage amène le nombre 25 ou bien $\llbracket 1, 8 \rrbracket \rightarrow \llbracket 25, 32 \rrbracket$ où 5 devient 25 et où il y a un décentrage en plus. Il ne semble pas qu'il puisse y avoir plusieurs singularités et plusieurs décentrages, de sorte que l'accident p -adique est pourrait se résumer à $Sing_p + Dec_p$ où $Sing_p$ est le delta de valuations gagné par l'apparition de la singularité et où Dec_p est 0 où 1.

On utilisera peut-être la définition suivante :

Définition 2. On appelle **longueur p -adique** du segment $\llbracket 1, b \rrbracket$ le nombre m est tel que $5^m \leq b < 5^{m+1}$.

La proposition suivante résume ce que l'on sait sur le calcul du $\iota(\varphi)$:

Proposition 2. *Calcul de $\iota(\varphi)$:*

- Si l'intervalle $\llbracket a, n \rrbracket$ présente un accident p -adique de degré l alors

$$v\left(\frac{n}{b}\right) = l \text{ et donc } \iota(\varphi) = l + v(b) > v(b).$$

- Dans le cas contraire,

$$v\left(\frac{n}{b}\right) = 0 \text{ et } \iota(\varphi) = v(b).$$

Autrement dit

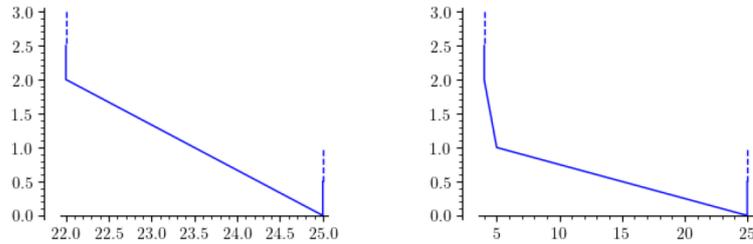
$$\iota(\varphi) = \text{Acc}_p(\llbracket a, n \rrbracket) + v(b)$$

De manière symétrique on a :

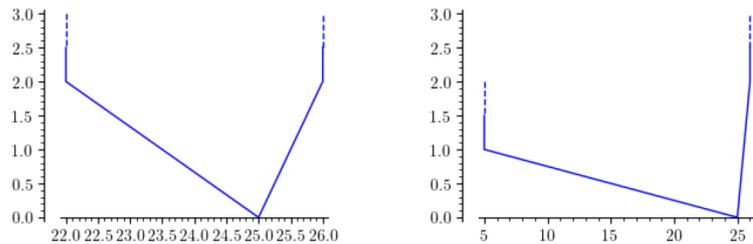
$$\begin{aligned} \iota(\varphi) &= \text{Acc}_p(\llbracket a, n \rrbracket) + v(b) \\ &= \text{Acc}_p(\llbracket b, n \rrbracket) + v(a) \\ &= \text{Acc}_p(\llbracket b, n-1 \rrbracket) + v(n) \\ &= \text{Acc}_p(\llbracket a, n-1 \rrbracket) + v(n). \end{aligned}$$

Exemple 1. Donnons trois exemples.

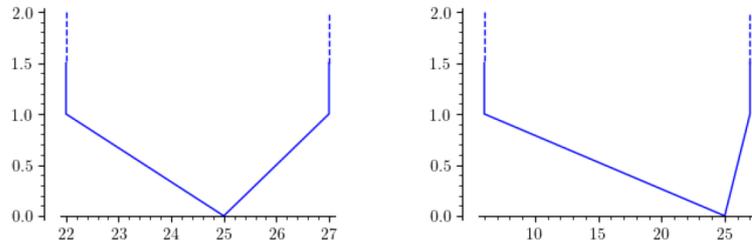
- Si $b = 4, a = 22$ donc $n = a+b-1 = 25$. Ici la longueur 5-adique de $[1, 4]$ est 0 donc $\llbracket 22, 25 \rrbracket$ a un accident 5-adique de 2 donc $\iota(\varphi) = 2$. Les polygones de Newton de φ et de $\varphi(1-X) - 1$ sont respectivement :



- Si $b = 5, a = 22$ donc $n = a+b-1 = 26$. Ici la longueur 5-adique de $[1, 5]$ est 1 donc $\llbracket 22, 26 \rrbracket$ a un accident 5-adique de 1 donc $\iota(\varphi) = 2$. Les polygones de Newton de φ et de $\varphi(1-X) - 1$ sont respectivement :



- Si $b = 6, a = 22$ donc $n = a+b-1 = 27$. Ici la longueur 5-adique de $[1, 6]$ est 1 donc $\llbracket 22, 27 \rrbracket$ a un accident 5-adique de 1 donc $\iota(\varphi) = 1$. Les polygones de Newton de φ et de $\varphi(1-X) - 1$ sont respectivement :



On voit que l'on retrouve le $\iota(\varphi)$ comme l'ordonnée du premier point du polygone de Newton de φ ce qui sera éclairci ci-dessous.

On voit également que tous ces modèles sont inséparables, de degré d'inséparabilité 25, ce qui invalide le fait que ι est le degré d'inséparabilité, ou même que ce degré est l'entier immédiatement supérieur ou égal à ι . Par contre on a bien ι inférieur au degré d'inséparabilité.

Si l'on revient à notre remarque préliminaire, si $\iota = 1$ alors nécessairement $\llbracket a, b \rrbracket$ contient un multiple de p car sinon $b < p$ (car b est la largeur de $\llbracket a, n \rrbracket$ et qu'un intervalle de largeur $b \geq p$ contient forcément un multiple de p) auquel cas

$$v\left(\frac{n}{b}\right) = v(\llbracket a, n \rrbracket) - v(\llbracket 1, b \rrbracket) = 0 - 0 = 0$$

et $v(b) = 0$ donc

$$\iota(\varphi) = v\left(\frac{n}{b}\right) + v(b) = 0$$

6. ORDONNÉE INITIALE DANS LE POLYGONE DE NEWTON

Dans le cas des arbres de Bezout le premier point du polygone de Newton du modèle φ a pour ordonnée $\iota - v(a)$. On le démontre ci-dessous.

Proposition 3. *Le premier point du polygone de Newton du modèle φ de l'arbre de Bezout d'indices a, b a pour ordonnée $\iota(\varphi) - v(a)$, et celle de $\varphi(1 - X) - 1$ est $\iota - v(b)$. Le dernier point est dans les deux cas $(n, v(n))$.*

Cette ordonnée c'est la valuation du coefficient initial c de φ :

$$\varphi = cx^a + \dots$$

Or on a

$$C_{a,b}x^{a-1} + \dots = C_{a,b}x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \varphi' = acx^{a-1}$$

donc $C_{a,b} = ac$ d'où $\iota(\varphi) = v(a) + v(c)$ et d'où la conclusion. Le raisonnement est identique pour le sommet \mathcal{N} avec $\varphi(1 - X) - 1$. Pour ∞ on regarde le coefficient du terme dominant :

$$\varphi = \dots + cx^n$$

donc

$$\dots \pm C_{a,b}x^{n-1} = C_{a,b}x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \varphi' = \dots + ncx^{n-1}$$

donc $\pm C_{a,b} = nc$ d'où $\iota = v(n) + v(c)$ ie $v(c) = \iota - v(n)$.

Pour les arbres en général, à quelle condition a-t-on comme premier point $(e, \iota - v(e))$ où e est l'indice de ramification du point de coordonnées \mathcal{O} ? On fait le même raisonnement que précédemment. Si

$$\varphi = cx^e + \dots$$

on cherche la valuation du coefficient c . On a d'un part,

$$\varphi' = cex^{e-1} + \dots$$

et d'autre part il existe un polynôme primitif ψ tel que

$$\varphi' = up' \psi(x)$$

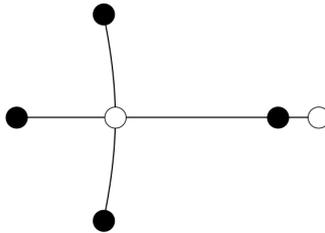
où $\psi(x) = \prod (b_i x - a_i)^{e_i}$ rassemblent les informations sur les sommets ramifiés de l'arbre dans le modèle φ . On a donc

$$ce = \pm up' \prod a_i^{e_i - 1}.$$

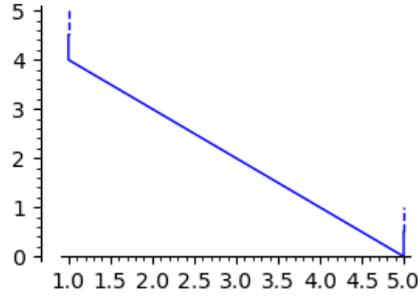
Il s'en suit que si $\prod a_i \neq 0 \pmod p$ ie si aucun point ramifié ne se réduit sur le sommet considéré alors

$$v(c) + v(e) = \iota \text{ ie } v(c) = \iota - v(e)$$

Exemple 2. Voici un exemple dans lequel l'ordonnée initiale n'est pas $\iota - v(e)$. Considérons le Bezout $(4, 2)$:



Avec la formule intégrale on obtient $\varphi = 5x^4 - 4x^5 = x^4(5 - 4x)$ ce qui démontre que le sommet blanc non ramifié a pour coordonnées dans ce modèle de $x = 5/4$. Le polygone de Newton de $\varphi(x + 5/4)$ est alors :



Comme on le voit l'ordonnée initiale n'est pas $\iota - v(e) = 1 - 0 = 1$ mais 4. La proposition suivante donne la formule générale permettant d'obtenir ce 4.

La proposition est la suivante :

Proposition 4. *Le premier point du polygone de Newton d'un modèle $\varphi(s + X)$ centré en un sommet s (de coordonnée entière dans le modèle φ - on s'intéresse à la réduction de s) d'indice de ramification e sera $\iota - v(e)$ lorsque aucun sommet ramifié entier (dans le modèle φ) ne se réduit sur s . En général, l'ordonnée initiale est*

$$\iota + \sum (e_i - 1)v(s - a_i) - v(e)$$

où la somme ne prend en compte que les sommet ramifiés à coordonnée entière dans le modèle φ .

Pour obtenir cela on raisonne comme dans le cas précédent mais avec $\varphi(s + x)$. Cela donne

$$ce = up^t \prod (b_i s - a_i)^{e_i - 1}$$

donc

$$v(c) = \iota + \sum_i (e_i - 1)v(b_i s - a_i) - v(e)$$

Ensuite, si le sommet ramifié a_i/b_i n'est pas entier alors $v(a_i) = 0$ et $v(b_i) > 0$ donc $v(b_i s - a_i) = 0$ disparaît de la somme. En d'autres termes si a_i/b_i n'est pas entier, il ne risque pas de se réduire sur le sommet entier s .

Exemple 3. Revenons sur l'exemple précédent avec $s = 5/4$, on a en appliquant la formule précédente :

$$\begin{aligned} v(c) &= 1 + 3v\left(\frac{5}{4} - 0\right) + 1v\left(\frac{5}{4} - 1\right) - v(1) \\ &= 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0 - 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

7. ABAISSEMENT DES ORDONNÉES DANS LES POLYGONES DE NEWTON

On refait le même raisonnement que pour les coefficients initial et final, mais avec un coefficient quelconque du modèle φ . Dans ce cas on a

$$\varphi = \dots + cx^k + \dots$$

qui donne

$$\varphi' = \dots + c k x^{k-1} + \dots$$

et d'autre part on a

$$\varphi' = u p^i \psi(x)$$

avec $\psi(x)$ polynôme primitif entier. Il s'en suit que $v(kc) \geq i$, ce qui donne la proposition suivante :

Proposition 5. *Dans le polygone de Newton d'un modèle d'arbre entier primitif φ , l'ordonnée d'un point d'un point d'abscisse k est supérieure à $\iota(\varphi) - v(k)$.*

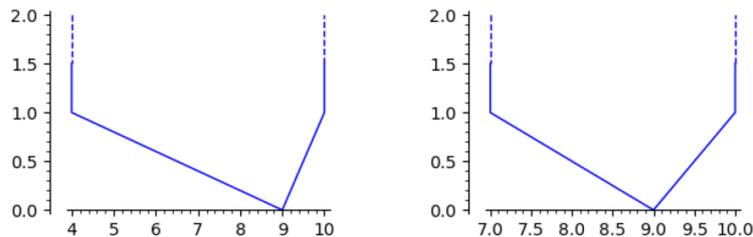
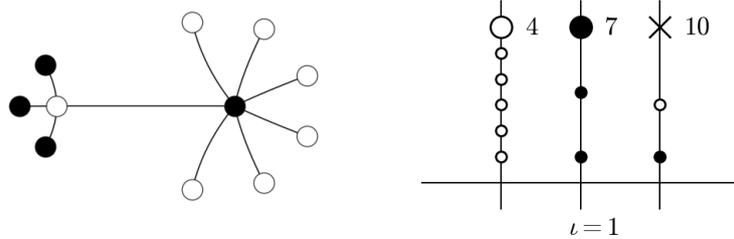
Cela donne une première indication sur le lien entre le nombre $\iota(\varphi)$ et le degré d'inséparabilité de $\bar{\varphi}$. Ce degré est égale au minimum des valuations des indices de ramification des racines de $\bar{\varphi}$ ce qui se constate sur le polygone de Newton par "l'abscisse d'atterrissage". D'après le proposition ci-dessus cette abscisse ne peut arriver avant p^i . Il s'en suit que la valuation du sommet correspondant de $\bar{\varphi}$ est supérieur à $\iota(\varphi)$. On a ainsi

Proposition 6. *Le degré d'inséparabilité de $\bar{\varphi}$ est supérieur ou égal à $\iota(\varphi)$.*

A noter que l'on a effectivement des exemple ou le degré d'inséparabilité est strictement supérieur à ι , par exemple les modèles à ι fractionnaire dans le document [2] où $\iota = 17/20$ et le degré d'inséparabilité est de 1.

Conjecture fausse 2. *Le degré d'inséparabilité de $\bar{\varphi}$ est l'entier immédiatement supérieur à $\iota(\varphi)$.*

Cette conjecture est contredite par l'arbre modulo 3 suivant (qui n'a rien d'exceptionnel) :

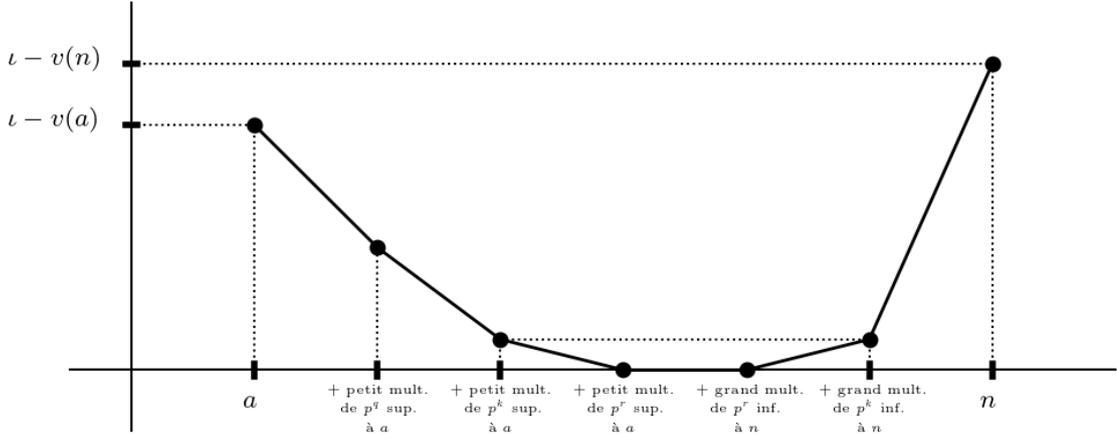


dans cette arbre on a $\iota = 1$ mais le degré d'inséparabilité est de 3^2 ainsi qu'on peut le voir par l'abscisse d'atterrissage des deux polygones.

Remarque. *Notons cependant que l'on aura égalité entre ι et le degré inséparable lorsque le degré de φ est inférieur à p^{i+1} .*

8. FORME GÉNÉRALE DES POLYGONES DE NEWTON DE φ ET DE $\varphi(1 - X) - 1$

Le polygone de φ a la forme suivante :



Conjecture 5. Les points d'arrêts pour a (respectivement b) sont forcément des plus petits multiples de puissances de p supérieurs à a (resp b). Les points d'arrêts pour n sont forcément des multiples des plus grandes puissances de p inférieures à n .

On appelle **itinéraire p -adique de a** dans l'intervalle $[a, n]$ la liste des valuations des abscisses des points par lesquels le polygone de Newton de φ serait susceptible de passer pour aller de du point $(a, \iota - v(a))$ au premier point d'ordonnée nulle.

Par exemple si $[a, n] = [60, 100]$ alors entre 60 et 100 les premières puissances successives de p rencontrées sont :

$$\begin{matrix} 60 & \dots & 63 & \dots & 81 & \dots \\ v = 1 & v = 0 & v = 2 & v \leq 2 & v = 4 & v \leq 4 \end{matrix}$$

donc l'itinéraire p -adique est $(1, 2, 4)$.

Le polygone de φ définit une liste de valuations qui se sont effectivement réalisées dans le chemin entre $(a, \iota - v(a))$ et le premier point d'ordonnée nulle. En comparant cette liste avec l'itinéraire p -adique de a dans $[a, n]$ cela définit 2 listes :

- la liste des valuations obligatoires issues de a
- la liste des valuations interdites issue de a

Exemple 4. considérons modulo 3 l'arbre de Bezout de paramètres $a = 60$, $b = 109$ et $n = 168$. L'itinéraire 3-adique de 60 dans l'intervalle $[60, 168]$ est $(1, 2, 4)$ (comme l'exemple ci-dessus). Le polygone de Newton de φ a pour sommets $(60, 1)$, $(81, 0)$, $(162, 0)$ et $(168, 1)$. donc la **liste des valuations effectivement prises en partant de a** est $(1, 4)$. En comparant avec l'itinéraire p -adique on a en déduit que :

- la liste des valuations obligatoires issues de a est $(1, 4)$
- la liste des valuations interdites issues de a est (2)

Conjecture 6. la liste des valuations obligatoires et interdites issues de a , b et n sont cohérentes : plus précisément

- $listValOblig_a \cap listValInter_b = \emptyset$
- $listValOblig_a \cap listValInter_n = \emptyset$
- $listValOblig_b \cap listValInter_a = \emptyset$

- $listValOblig_b \cap listValInter_n = \emptyset$
- $listValOblig_n \cap listValInter_a = \emptyset$
- $listValOblig_n \cap listValInter_b = \emptyset$

Question 2. *Comment déterminer la liste globale des valuations interdites étant donnés a et b (et p)?*

9. ABAISSEMENT DES ORDONNÉES DANS LE POLYGONE POUR L'ARBRE DE BEZOUT

Premiers éléments pour démontrer la conjecture de la section précédente. On a vu dans la section 7 que le premier point est $(a, \iota - v(a))$. Par ailleurs en reprenant le raisonnement de la section 7 on a $\varphi = \dots + c_k x^k + \dots$ donc $\varphi' = \dots + kc_k x^{k-1} + \dots$ et d'autre part

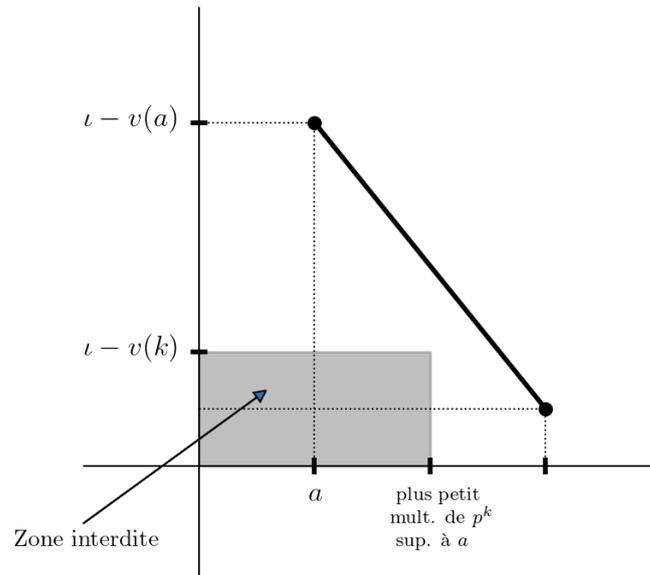
$$\begin{aligned} \varphi' &= up^t \psi = up^t x^{a-1} (1-x)^{b-1} \\ &= up^t \sum_{q=a-1}^{n-1} d_q x^q \end{aligned}$$

donc $kc_k = up^t d_{k-1}$ d'où

$$v(c_k) = \iota - v(k) + v(d_{k-1}) \geq \iota - v(k)$$

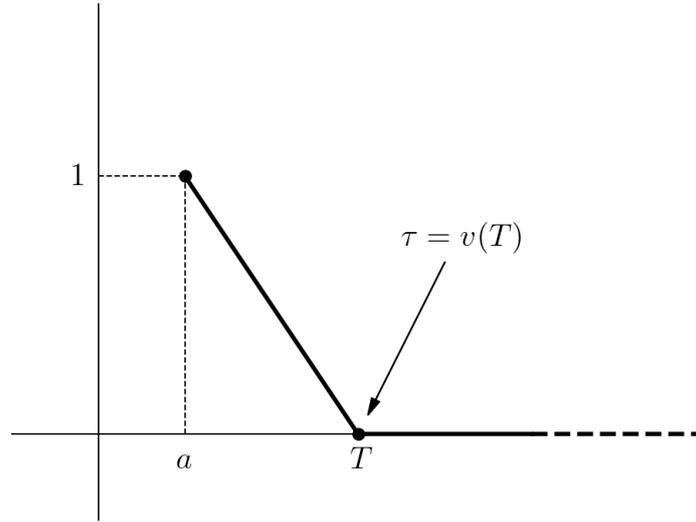
On voit que pour l'abaissement des ordonnées tout dépend du polynôme ψ , toute les contraintes sont encodées dans le polynôme ψ .

Concernant l'inégalité déjà vue dans la section 7, cela restreint la rapidité de la décroissance du polygone, en termes graphique :



10. CONJECTURE PRÉCISE POUR $\iota = 1$

Nous avons vu dans la conjecture 1 que le nombre de sommets simples se réduisant sur le sommet \mathcal{B} est égal à l'opposé du résidu de a modulo p^k pour un certain k . L'objet de cette section est de déterminer cet entier k . On le notera $\tau(a, b)$. En d'autres termes $\tau(a, b)$ désigne, pour les a, b tels que $\iota(a, b) = 1$, la valuation de l'abscisse du point d'atterrissage du polygone de Newton de φ :



L'algorithme suivant calcule $\tau(a, b)$ avec une vitesse d'exécution de l'ordre de 1000 fois plus rapide que le calcul du polygone de Newton. L'idée est de montrer que $\tau(a, b)$ est égal au plus petit k tel que la réduction de l'arbre modulo p^k a encore un $\iota = 1$

Algorithm 1 Tau : calcul de la valuation du premier point d'ordonnée nulle du polygone de Newton de $\varphi_{a,b}$

Require: a et b deux entiers naturels non nuls.

```

if  $\iota(a, b) \neq 1$  then
  return Rien
end if
if  $v(a) = 1$  ou  $v(b) = 1$  then
  return 1
end if
 $K \leftarrow \text{Ent}(\log_p(a))$ 
for  $k=1, \dots, K-1$  do
  if  $p^k - p^{k-1} < b \% p^k < p^k$  then
    Passer au  $k$  suivant
  end if
  if  $\iota(a \% p^k, b \% p^k) = 1$  then
    return  $k$ 
  end if
end for
return  $K$ 

```

Cet algorithme est basé sur les 3 propositions suivantes ci-dessous (non démontrées pour l'instant).

Proposition 7. Soit a et b tels que $\iota(a, b) = 1$ et $\tau(a \% p^k, b) = q$ alors $\tau(a, b) = q$.

Rappelons tout d'abord que

$$L_\alpha = \{b \in \mathbb{N} \mid \iota(\alpha, b) = 1\}$$

et que donc $\tau(\alpha, b)$ ne sera défini que lorsque $b \in L_\alpha$.

Remarquons qu'il est implicite dans la proposition ci-dessus que $\iota(a \% p^k, b) = 1$ sinon on aura pas $b \in L_{a \% p^k}$. Remarquons également qu'il serait faux d'affirmer que $\tau(a \% p^k, b) = q$ implique $\tau(a, b) = q$ car $\iota(a \% p^k, b) = 1$ n'implique pas que $\iota(a, b) = 1$; en d'autres termes la difficulté est que $L_{a \% p^k} \not\subset L_a$. Par contre on a la **version forte de la proposition 1** suivante :

$$L_a \cap L_{a \% p^k}^q = L_a^q \text{ pour tout } q \leq k$$

où l'on a utilisé la notation

$$L_\alpha^q = \{b \in L_\alpha \mid \tau(\alpha, b) = q\}$$

Proposition 8. Soit $p^{k-1} < a < p^k$. Dans L_a , les éléments b avec un τ non maximum (ie $\tau < k$ cf proposition 9) ne dépendent que de $b \pmod{p^k}$. C'est également le cas pour les b avec $\tau = k$ sauf pour les b juste avant un multiple de p^k ie $p^k - p^{k-1} < b \% p^k < p^k$ ie avec un digit de $p-1$ en position $k-1$: ces derniers ne sont pas dans L_a .

Proposition 9. Si $a < p^k$ alors pour tout b , $\tau(a, b) \leq k$.

Montrons maintenant qu'en utilisant ces 3 propositions, l'algorithme proposé est correct. A l'issue de l'algorithme, le nombre k retourné est le plus petit tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} b \text{ n'est pas juste avant un multiple de } p^k \\ \iota(a \% p^k, b \% p^k) = 1 \text{ ie } b \% p^k \in L_{a \% p^k} \end{array} \right.$$

Donc d'après la proposition 8 on a $b \in L_{a \% p^k}$. Il s'en suit que d'après la proposition 9 on a $\tau(a \% p^k, b) \leq k$. En fait on a même $\tau(a \% p^k, b) = k$: si l'on avait $\tau(a \% p^k, b) = q < k$ alors d'après la proposition 7 version forte on pourrait conclure que $b \in L_{a \% p^q}^q$ donc $b \in L_{a \% p^q}$ donc avec la proposition 2, $b \% p^q \in L_{a \% p^q}$ (b n'est pas proche d'un multiple de p^q sinon $b \notin L_{a \% p^q}$). Il s'en suit donc que $\iota(a \% p^q, b \% p^q) = 1$ ce qui contredit la minimalité de k . On a ainsi montré que $\tau(a \% p^k, b) = k$. D'après la proposition 7, comme on sait que $\iota(a, b) = 1$ alors on peut en déduire que $\tau(a, b) = k$.

Commençons la démonstration pour la proposition 9. Dans les raisonnements ci-dessous on écrira génériquement u pour des inversibles de \mathbb{Q}_p .

- Montrons que si $a = 1$ alors pour tout b , $\tau(a, b) = 1$. On a dans ce cas

$$\varphi' = 3ux(1-x)^{b-1} \sim 3(1-(b-1)x + (b-1)(b-2)ux^2 + \dots)$$

Par conséquent,

$$\varphi \sim 3x - 3(b-1)ux^2 + (b-1)(b-2)ux^3 + \dots$$

Or $\iota(a, b) = 1$ ce qui va impliquer que la valuation du coefficient de x^3 est nulle ce qui montre que $\tau = 1$. L'inversibilité de ce coefficient vient de $C_{1,b} = b$ alors $\iota(1, b) = 1$ implique $v(b) = 1$ d'où $v(b-1) = 0$ et $v(b-2) = 0$ donc $v((b-1)(b-2)) = 0$.

- Montrons que si $a = 2$ alors pour tout b on a $\tau(a, b) = 1$. On a de même que précédemment

$$\begin{aligned} \varphi' &= 3ux(1-x)^{b-1} \\ &\sim 3(x + (b-1)x^2 + \dots) \\ &= 3x + 3(b-1)x^2 + \dots \end{aligned}$$

donc $\varphi \sim \frac{3}{2}x^2 + (b-1)x^3 + \dots$. Si $v(b-1) = 0$ alors on aura bien $\tau(a, b) = 0$. Or $\iota(2, b) = 1$ implique $v(b-1) = 0$ car sinon $b = 3k + 1$ alors

$$\begin{aligned} C(2, b) &= \frac{(b+1)!}{1!(b-1)!} = b \times (b+1) \\ &= (3k+1)(3k+2) \end{aligned}$$

donc $\iota(2, b) = 0$.

RÉFÉRENCES

- [1] Frank OLVER et al. *The NIST Handbook of Mathematical Functions - Section 8.17*. <https://dlmf.nist.gov/8.17>. [Online; accessed 23-January-2023]. 2010.
- [2] Gabriel SORANZO. *Inséparabilité/Profondeur d'un modèle d'arbre*. Jan. 2023.
- [3] Gabriel SORANZO. *Morphismes de Belyi simplement ramifiés, Application à la réduction des arbres en genre 0*. 2020. DOI : 10.5281/zenodo.6634769.

Email address: gabriel.soranzo@u-pec.fr