Soutenance du mémoire de M2

Morphismes de Belyi simplement ramifiés
Application à la réduction des arbres en genre 0

Gabriel Soranzo
Dirigé par Leonardo Zapponi
Sorbonne Université

1) Objets d’étude
2) Théorème de Belyi
3) Critères d’admissibilités de sommets
4) Application à la réduction des arbres

Définition

Soit k un corps parfait. Soit $\mathcal{C}$ un courbe algébrique non-singulière projective sur k. Un morphisme fini séparable modérément ramifié $\varphi: \mathcal{C} \to \mathbb{P}_k^1$ ayant au plus 3 valeurs critiques, toutes k-rationnelles, sera appelé un **morphisme de Belyi** (**dessin d'enfant**).

Les points dans les fibres critiques sont appelés des **sommets**.

Les ordres d'annulation de ces points sont appelés **valences**.

Définition

Soit k un corps parfait. Soit $\mathcal{C}$ un courbe algébrique non-singulière projective sur k. Un morphisme de Belyi $\varphi: \mathcal{C} \to \mathbb{P}_k^1$ sera appelé un **morphisme de Belyi totalement ramifié** (**arbre**) lorsqu’une de ses fibres critiques est totalement ramifiée.

Définition

Soit k un corps parfait. Soit $\mathcal{C}$ un courbe algébrique non-singulière projective sur k. Un morphisme de Belyi $\varphi: \mathcal{C} \to \mathbb{P}_k^1$ sera appelé un **morphisme de Belyi simplement ramifié** (**arbre pondéré**) lorsqu'une de ses fibres critiques présente un unique point ramifié.

2) Le théorème de Belyi

Théorème de Belyi
Soit $\mathcal{C}$ une courbe non-singulière complète définie sur $\mathbb{C}$. La courbe $\mathcal{C}$ est alors définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement s'il existe un morphisme non constant $\mathcal{C} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ avec au plus 3 valeurs critiques (c.a.d. un morphisme de Belyi défini sur $\mathcal{C}$).

3) Critères d'admissibilité de sommets: critère 1

Critère n°1

Soit (λ_i) une famille de nombres complexes distincts.

Soit (a_i) une famille d'entiers relatifs tels que $\sum_i a_i = 0$.

Posons $\varphi = \prod_i (t - \lambda_i)^{a_i}$.

Le morphisme φ est un morphisme de Belyi simplement ramifié si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\sum_i \frac{a_i}{t - \lambda_i} = \frac{\alpha}{\prod_i t - \lambda_i}$$

3) Critères d'admissibilité de sommets: critère 1

Lemme:
k algébriquement clos de caractéristique nulle
$\mathcal{C}$ courbe projective non singulière
$\varphi: \mathcal{C} \to \mathbb{P}^1_k$ morphisme assimilé à $f \in k(\mathcal{C}) \setminus k$
$\omega = df/f$ la dérivée logarithmique de f

a) Les pôles de ω sont simples et sont les points de $div(f)$
b) Les points d'annulation de ω sont les points de ramification de φ qui ne sont pas dans $div(f)$

3) Critères d'admissibilité de sommets: admissibilité des sommets rationnels

Soit (λ_i) une famille de rationnels distincts.
Soit V le déterminant de Vandermonde des λ_i:

$$V = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{k>j} \lambda_k - \lambda_j$$

Soit pour tout i,

$$V_i = \prod_{j \neq i} \lambda_i - \lambda_j$$

On a donc pour tout i, V divisible par V_i, et l'on peut alors poser

$$a_i = \frac{V}{V_i} = (-1)^{n-i} V\left(\lambda_1, \dots, \widehat{\lambda_i}, \dots, \lambda_n\right)$$

Proposition:
Les a_i sont de somme nulle et l'on a

$$\sum_i \frac{a_i}{t - \lambda_i} = \frac{V}{\prod_i t - \lambda_i}$$

Critère 2

Soit (λ_i) une famille de nombres complexes distincts.
Les λ_i constituent les sommets d’un arbre pondéré si et seulement si

$$\left(\frac{1}{\prod_{j\neq i}\lambda_i-\lambda_j}\right)\in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$$

3) Critères d'admissibilité de sommets: reformulation du critère 1

Reformulation du critère 1
Soit (λ_i) une famille de nombres complexes distincts.
Soit (a_i) une famille d'entiers relatifs.
Posons $\varphi = \prod_i (t - \lambda_i)^{a_i}$
Le morphisme φ est un morphisme de Belyi simplement ramifié si et seulement si

$$\forall j \in \{0, \dots, n-2\}, \sum_i a_i \lambda_i^j = 0$$

C'est-à-dire que le système à $n-1$ équations ci-dessous est vérifié:

$$(\mathcal{Z}) \begin{cases} a_1 & + & a_2 & + & \dots & + & a_n & = & 0 \\ a_1\lambda_1 & + & a_2\lambda_2 & + & \dots & + & a_n\lambda_n & = & 0 \\ a_1\lambda_1^2 & + & a_2\lambda_2^2 & + & \dots & + & a_n\lambda_n^2 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & 0 \\ a_1\lambda_1^{n-2} & + & a_2\lambda_2^{n-2} & + & \dots & + & a_n\lambda_n^{n-2} & = & 0 \end{cases}$$

4) Application à la réduction des arbres en genre 0

K est un corps local
$\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers de K
$\mathfrak{m} = (\pi)$ son idéal maximal
v une de ses valuations
$k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$ son corps résiduel

4) Application à la réduction des arbres en genre 0: réduction des points et des morphismes

$P = [a:b] \in \mathbb{P}^1_K(K)$ donné
Comme $K = Frac(\mathcal{O}_K)$ alors on peut supposer que $a, b \in \mathcal{O}_K$ et sont premiers entre eux
Comme $\mathcal{O}_K$ est principal alors $au + bv = 1$ donc $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) \neq (0,0)$ dans k^2 donc $\bar{P} = \left(\bar{a}, \bar{b}\right) \in \mathbb{P}^1_k(k)$: c'est la **réduction de $\boldsymbol{P}$**

$\varphi: \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ donné est associé à $f \in K(t) \setminus K$
En simplifiant la fraction rationnelle f on peut supposer que $f = P/Q$ avec $P, Q \in \mathcal{O}_K[t]$ premiers entre eux.

La **réduction de $\boldsymbol{\varphi}$** est alors $\overline{\varphi}: \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ associé à $\overline{f} = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}} \in k(t)$ qui sera bien défini si $\overline{Q} \neq 0$ et $\overline{P} \neq \lambda\overline{Q}$.

On dira qu'un morphisme de Belyi $\varphi: \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ **se réduit bien** lorsque les sommets et les valeurs critiques de φ se réduisent (donc $\overline{\varphi}$ est non constant) et que $\overline{\varphi}$ est un morphisme de Belyi.

4) Application à la réduction des arbres en genre 0: équivalences et modèles

Equivalence des morphismes de Belyi $\varphi, \psi: \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ ie $\varphi = \alpha \circ \psi \circ \beta$ avec α, β automorphismes de $\mathbb{P}^1_K$ ie homographies.

Remarque: la bonne réduction n'est pas compatible avec l'équivalence

Exemple de réduction dans $\mathbb{Q}_2$: $\varphi(t) = t$ se réduit bien mais $2\varphi(t) = 2t$ ne se réduit pas bien

Remarque 2: la bonne réduction est compatible avec l'équivalence sur $\mathcal{O}_K$ ie α et β sont des homographies de $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_K}$

Dessin d'enfant: classe d'équivalence de morphismes de Belyi

Modèle d'un dessin d'enfant: représentant de la classe ie morphisme de Belyi

Arbre: classe d'équivalence de morphismes de Belyi totalement ramifié

Arbre pondéré: classe d'équivalence de morphismes de Belyi simplement ramifié

Bonne réduction d'un dessin d'enfant: un de ses modèle φ a une bonne réduction

4) Application à la réduction des arbres: Critère de bonne réduction des modèles affines centrés

Critère de bonne réduction des modèles affines centrés

Soit φ un modèle d'arbre affine centré de valeurs critiques $0, \lambda$ et ∞ et tel que:

1) La racine nulle est modérément ramifiée
2) Les racines non nulles ont une réduction non nulle
3) La valeur critique λ est entière et ne se réduit pas sur 0
4) Le polynôme associé à φ est un élément polynôme primitif de $\mathcal{O}_K[t]$

Alors le morphisme φ a une bonne réduction

4) Application à la réduction des arbres: modèle minimal

Définition

Un modèle affine centré φ associé à un polynôme P est appelé un modèle minimal lorsque

- $P \in \mathcal{O}_K[t]$ et est primitif
- Les racines de P sont entières et l'une des racine est dans $\mathcal{O}_K^*$

Proposition 1

Tout arbre admet des modèles minimaux

Proposition 2

Soit un arbre $\mathcal{A}$ ayant le morphisme φ comme modèle affine centré.
Supposons que φ est centré en un sommet modérément ramifié.
L'arbre $\mathcal{A}$ se réduit bien si et seulement si le morphisme φ se réduit bien.

4) Application à la réduction des arbres: exemple d'étude

Etude de bonne réduction de l'arbre $\mathcal{D}_{a,b}$:

$$\frac{(a+b+1)!}{a!\,b!}\int_0 t^a(t-1)^b$$

X	1	2	3	4	5
1	$2^s.3^v$	$2^s.3^{rv}$	$2^s.5^v$	$2^s.3^r.5^{rv}$	$2^s.3^{rv}.7^v$
2	$2^v.3^s$	$2^{rv}.3^s.5^v$	$2^{rv}.3^s.5^{rv}$	$3^s.5^{rv}.7^v$	$2^{rv}.3^s.7^{rv}$
3	$2^s.5^v$	$2^s.3^v.5^{rv}$	$2^s.5^{rv}.7^v$	$2^s.5^{rv}.7^{rv}$	$2^s.3^{rv}.7^{rv}$
4	$2^v.3^v.5^s$	$3^{rv}.5^s.7^v$	$2^v.5^s.7^{rv}$	$2^{rv}.3^{rv}.5^s.7^{rv}$	$2^{rv}.3^{rv}.5^s.7^{rv}$
5	$2^s.3^s.7^v$	$2^s.3^s.7^{rv}$	$2^s.3^s.7^{rv}$	$2^s.3^s.5^v.7^{rv}$	$2^s.3^s.7^{rv}.11^v$
6	$2^v.7^s$	$2^{rv}.3^v.7^s$	$2^{rv}.3^{rv}.5^v.7^s$	$2^{rv}.3^{rv}.5^{rv}.7^s.11^v$	$2^{rv}.3^{rv}.7^s.11^{rv}$
7	$2^s.3^v$	$2^s.3^{rv}.5^v$	$2^s.3^{rv}.5^{rv}.11^v$	$2^s.3^{rv}.5^{rv}.11^{rv}$	$2^s.3^{rv}.11^{rv}.13^v$
8	$2^v.3^s.5^v$	$3^s.5^{rv}.11^v$	$2^{rv}.3^s.5^{rv}.11^{rv}$	$3^s.5^{rv}.11^{rv}.13^v$	$2^r.3^s.7^v.11^{rv}.13^{rv}$
9	$2^s.5^s.11^v$	$2^s.3^v.5^s.11^{rv}$	$2^s.5^s.11^{rv}.13^v$	$2^s.5^s.7^v.11^{rv}.13^{rv}$	$2^s.3^r.5^s.7^{rv}.11^{rv}.13^{rv}$