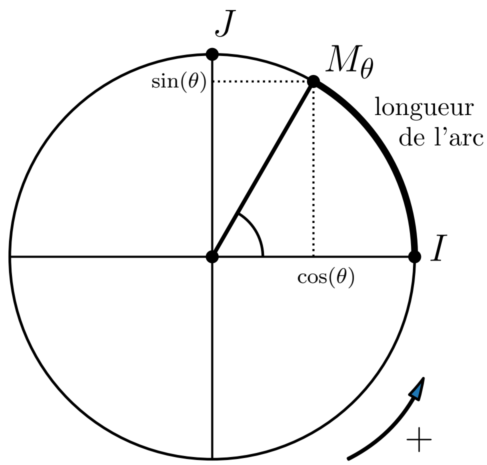
1 Fonctions trigonométriques



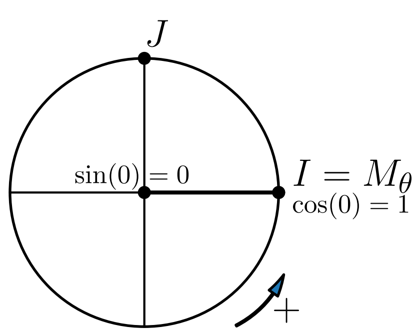
Par définition on voit sur ce schéma que

- Le point M_θ est le point du cercle trigonométrique tel que l'arc $\widehat{OM_\theta}$ est de longueur θ en radians en tournant dans le sens trigonométrique
- $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point M_θ
- $\sin(\theta)$ est l'ordonnée du point M_θ

Cela revient à dire que $M_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Par ailleurs:

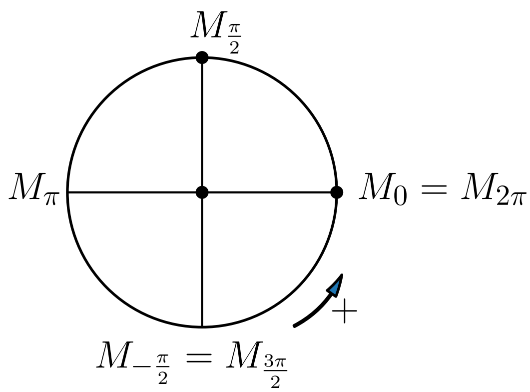
$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

Exemple 1.1
Le point M_0 est le point I:



On a donc $\begin{cases} \cos(0) = 1 \\ \sin(0) = 0 \end{cases}$ et donc $\tan(0) = \frac{0}{1} = 0$.

Exemple 1.2
On place d'autres points sur le cercle trigonométrique:



Ce qui donne les cosinus, sinus et tangentes suivants:

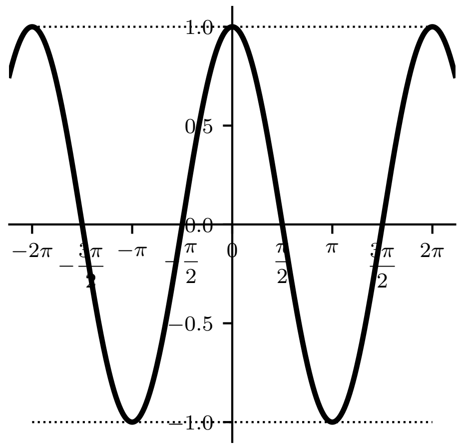
rad	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
deg	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
cos	0	1	0	-1	0	1
sin	-1	0	1	0	-1	0
tan	$V.I.$	0	$V.I.$	0	$V.I.$	0

On voit ici que le tableau est periodique de periode 2π (il se répète tout les 2π), ce qui est logique car le point M_θ retombe au même endroit.

2 Tracés

2.1 Tracés de base

Voici le tracé de la fonction cosinus:

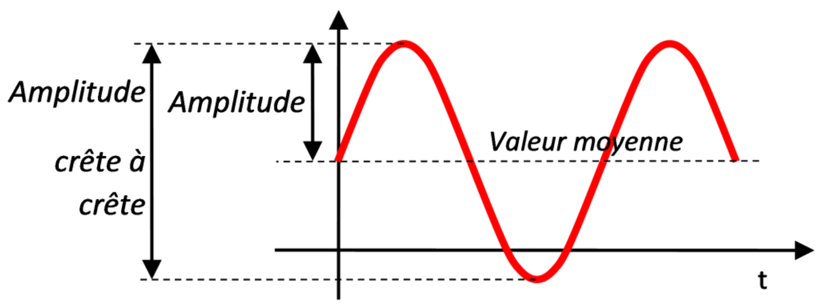


Exercice 2.1
Tracer la fonction sinus.

2.2 Tracés plus complexes

Dans un signal $A\sin(\omega t + \varphi) + B$:

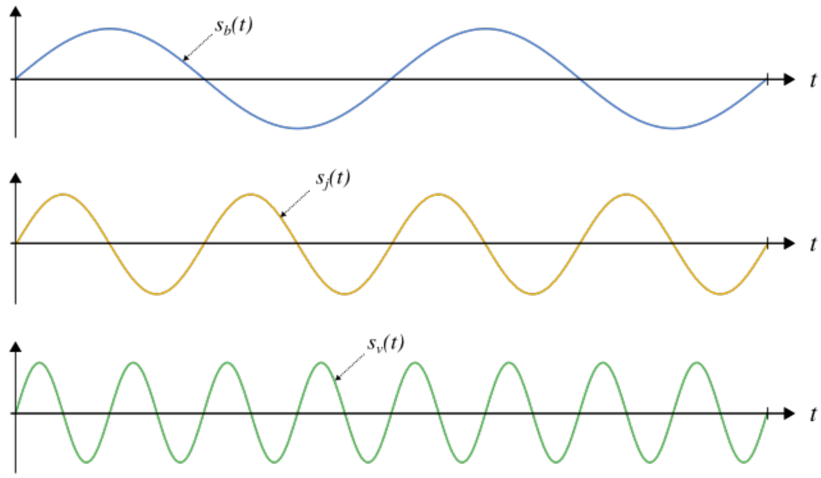
- Le A est l'**amplitude** du signal et B est la valeur moyenne: l'amplitude est égale à la moitié de la **distance crête à crête**.



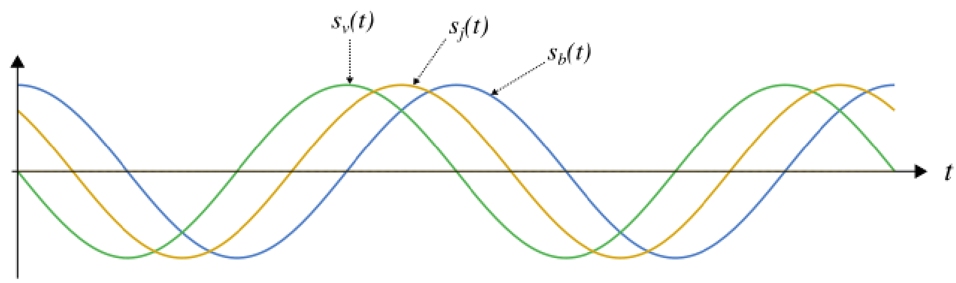
- Le ω est la **pulsation**: la pulsation est reliée à la fréquence f et à la periode T par les relations

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \text{ et } \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Lorsque l'on augmente la pulsation cela augmente donc la fréquence:



- Le φ est le **déphasage**: le déphasage permet de trouver le retard Δt entre le signal $A\sin(\omega t)$ et le signal $A\sin(\omega t+\varphi$. Le signal $A\sin(\omega t+\varphi)$ est en **avance de phase** qui lui donne une avance temporel de $\Delta t=\frac{\varphi}{\omega}$ (voir exemple).



Exemple 2.1
Tracé de $1,4\sin(0,7t-1,1)+0.4$

- Valeur moyenne de $0,4$
- Amplitude de $1,4$ donc crêtes entre $0,4-1,4=-1$ et $0,4+1,4=1,8$.
- Pulsation de 0.7 donc $0,7=\dfrac{2\pi}{T}$ donc la periode est égale à

$$T=\frac{2\pi}{0.7}\approx 9s$$

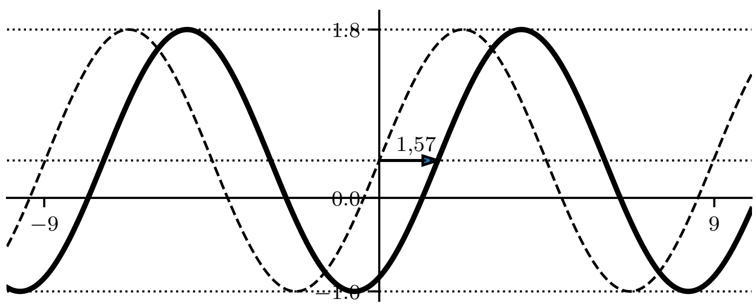
- Déphasage de $-1,1$ donc **retard** de

$$\frac{1,1}{0,7} \approx 1,57s$$

- Valeur initiale: en $t = 0s$ le signal vaut

$$1,4\sin(-1,1) + 0,4 \approx -0,84$$

Cela permet de tracer le signal:



2.3 Conséquences

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos\theta \in [-1;1] \\ \sin\theta \in [-1;1] \end{cases}$

2. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ n'est pas définie pour θ du type $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ car alors $\sin\theta = 0$: on le note

$$\mathrm{Def}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$$

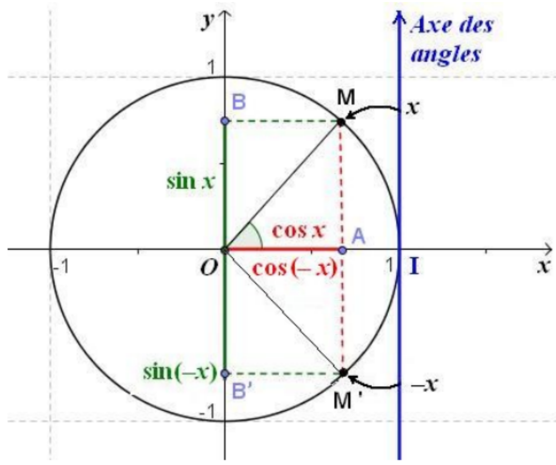
3. Les fonctions cos et sin sont 2π-perdiodiques:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) = \sin(x) \end{cases}$$

La fonction tan est π-periodique:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(x+\pi) = \tan(x)$$

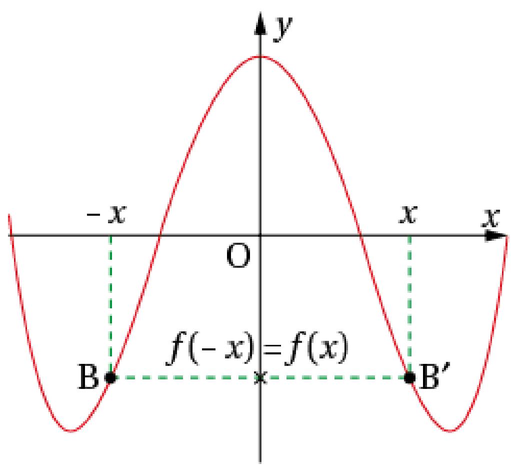
4. A partir du scéma suivant:



La fonction cos est une fonction paire:

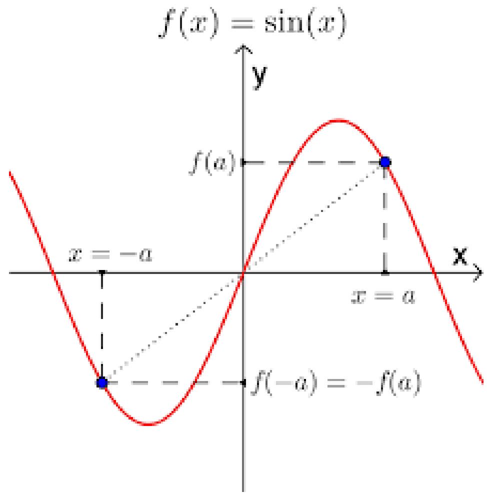
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$$

Traduction graphique:



La fonction sin est impaire:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$$

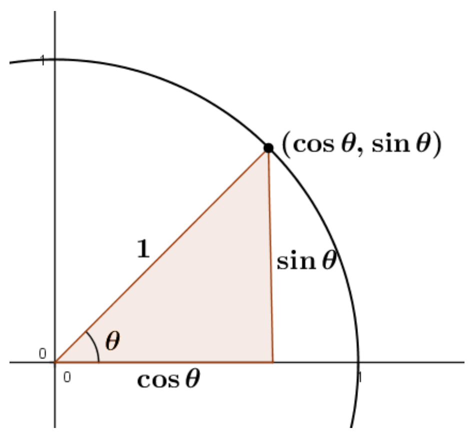


La fonction tan est impaire:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

5. Relation entre cos et sin:

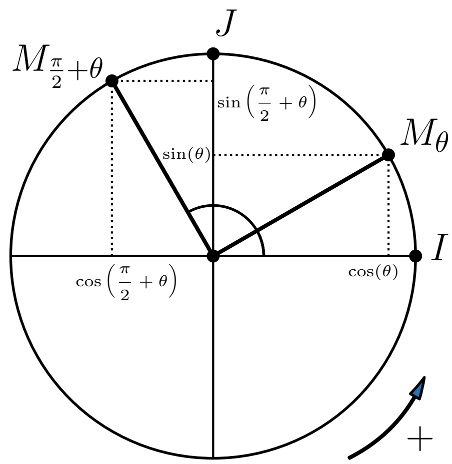
   - Relation de Pythagore: à partir de la figure ci-dessous



On voit à partir du théorème de Pythagore que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\,, \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

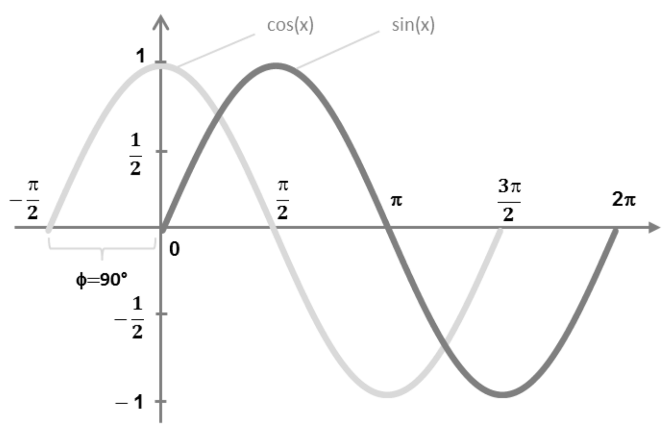
   - Déphasage: d'après la figure ci-dessous



On observe que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\, \cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

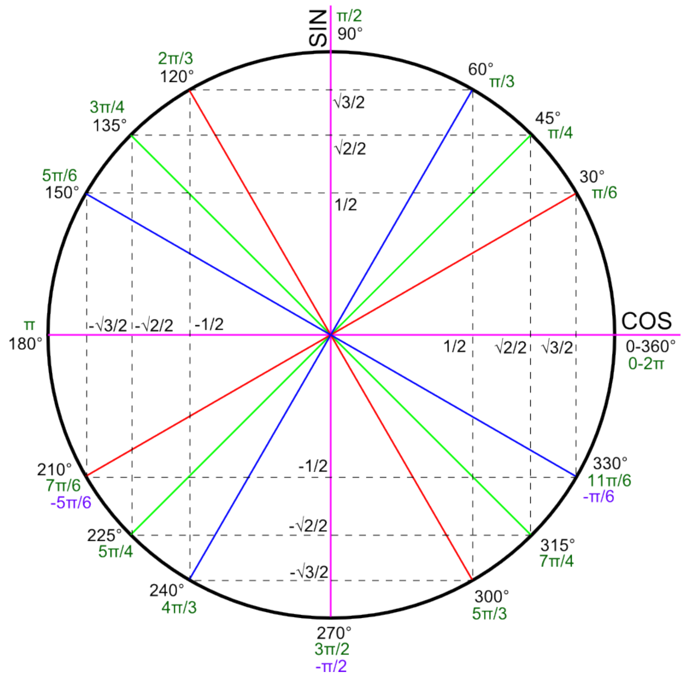
Graphiquement:



6. Valeurs de référence (à connaître par cœur): Les valeurs de référence des foncions trigonométriques sont les suivantes:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X

Qui se reportent graphiquement sur le cercle trigonométrique (construction à savoir refaire):



3 Formules trigonométriques

Les formules de base sont les suivantes (non démontrées):

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a
\end{aligned}}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos(a+a) \\
&= \cos a \cos a - \sin a \sin a
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$$

Comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$ alors on peut remplacer $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$ dans cette égalité ce qui donne:

$$\boxed{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a}$$

Toujours comme $\cos^2 + \sin 2 = 1$ on peut sinon remplacer $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$ ce qui donne:

$$\boxed{\cos 2a = 2\cos^a - 1}$$

En isolant les $\cos a$ et $\sin a$ dans ces deux égalités cela donne

$$\boxed{\cos a = \sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}} \text{ et } \boxed{\sin a = \sqrt{\frac{1-\cos(2a)}{2}}}$$

On a également

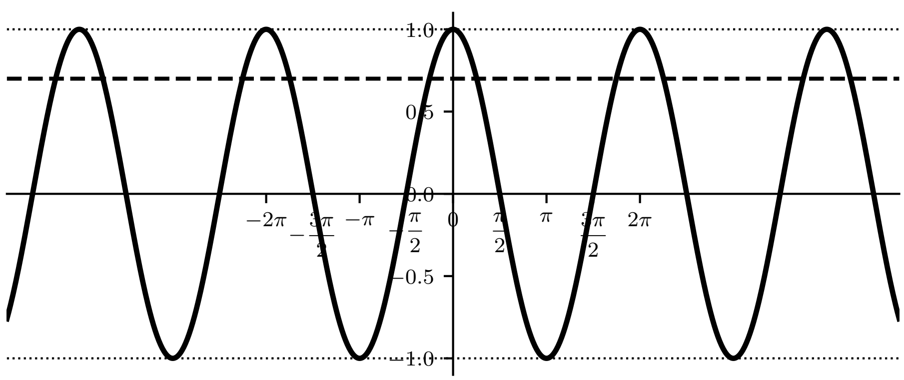
$$\begin{aligned} \sin(2a) &= \sin(a+a) \\ &= \sin a \cos a + \sin a \cos a \end{aligned}$$

Ce qui donne donc

$$\boxed{\sin(2a) = 2\sin a \cos a}$$

4 Equations trigonométriques

On veut par exemple résoudre des équation comme $\cos(x) = 0,7$:

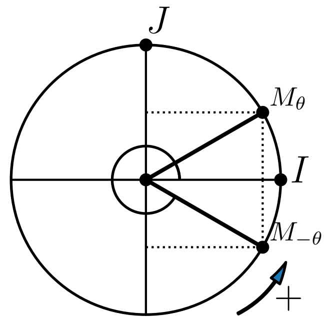


Sur cette figure on peut observer 10 solutions, il y en a en fait une infinité.

Méthode:

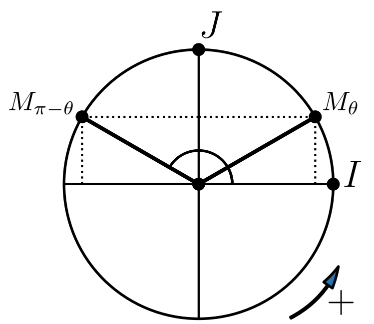
1. Trouver une solution avec les fonctions Arccos et Arcsin.
2. On en déduit toutes les solutions avec la parité et la periodicité:

   - Pour le cosinus:



$$\begin{aligned}
&\cos a = \cos b\\
\iff & a = b \mod 2\pi \text{ ou } a = -b \mod 2\pi\\
\iff & a = b + k \times 2\pi \text{ ou } a = -b + k \times 2\pi
\end{aligned}$$

- Pour le sinus:



$$\begin{aligned}
&\sin a = \sin b\\
\iff & a = b \mod 2\pi \text{ ou } a = \pi - b \mod 2\pi\\
\iff & a = b + k \times 2\pi \text{ ou } a = \pi - b + k \times 2\pi
\end{aligned}$$

Exemple 4.1
Résolvons l'équation $\cos(x) = 0.7$.

1. Recherche d'une solution: $\text{Arccos}(0.7) \approx 0.8$

2. On a donc

$$\begin{aligned}
&\cos(x) = 0.7\\
\iff & \cos(x) = \cos(0.8)\\
\iff & x = 0.8 + 2k\pi \text{ ou } x = -0.8 + 2k\pi\\
\iff & x \in \{0.8; 0.8 + 2\pi; 0.8 + 4\pi; \ldots; -0.8; -0.8 + 2\pi; -0.8 + 4\pi; \ldots\}
\end{aligned}$$

Exemple 4.2

Résolvons l'équation $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$
\begin{aligned}
& \sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\iff & \sin(3x) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
\iff & 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \\
\iff & 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\
\iff & x = -\frac{\pi}{12} + k \times \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k \times \frac{2\pi}{3} \\
\iff & x \in \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{12}; -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{12} + 2\pi; \ldots; \\ \frac{5\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{12} + 2\pi; \ldots \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$