1 Définition des nombres complexes

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Un nombre complexe est un nombre qui s'écrit

$$\boxed{a + jb} \text{ ou } a + ib$$

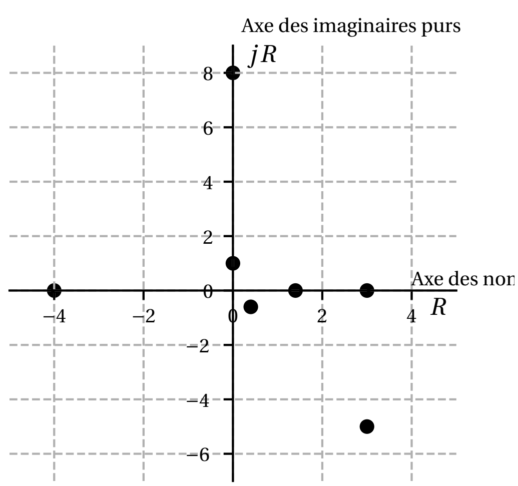
avec a et b sont deux nombres réels et j est un nombre tel que $j^2 = -1$ (donc pas un nombre réel, car pour les nombres réels les carrés sont toujours positifs).
Dans le nombre $z = a + jb$ on appelle:

- le nombre a est la **partie réelle** et se note $\text{Re}(a)$
- le nombre b est la **partie imaginaire** et se note $\text{Im}(a)$

Exemple 1.1
Considérons les nombres suivants:

1. $z = 3 - 5j$: ici $\text{Re}(z) = 3$ et $\text{Im}(z) = -5$
2. $u = 3$: ici $\text{Re}(u) = 3$ et $\text{Im}(u) = 0$: c'est un nombre réel
3. $z = 8j = 0 + 8j$: ici $\text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 8$: c'est un **imaginaire pur**
4. $\text{Im}(j) = \text{Im}(0 + 1j) = 1$ et $\text{Re}(j) = 0$
5. $\text{Re}(-4) = -4$ et $\text{Im}(4) = 0$.
6. $w = \sqrt{2}$ alors $\text{Re}(w) = \sqrt{2}$ et $\text{Im}(\sqrt{2}) = 0$
7. $w = \frac{2-3j}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}j$ alors $\text{Re}(w) = \frac{2}{5}$ et $\text{Im}(w) = -\frac{3}{5}$

On peut placer ces différent exemples sur le **plan complexe**:



Notations:

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels
- $j\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres imaginaires purs

1.2 Calculs avec la forme algébrique

La forme algébrique d'un nombre complexe c'est $z = a + jb$. Nous verrons plus tard qu'unnombre complexe peut s'écrire sous d'autre formes.

Exemple 1.2
Considérons les nombres complexes $z_1 = 2 - 3j$ et $z_2 = -1 + 4j$.
Calculons $z_1 + z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2-3j) + (-1+4j) \\ &= 2 + (-1) + (-3+4)j \\ &= 1 + 1j \\ &= 1 + j \end{aligned}$$

On peut de même calculer le produit $z_1 z_2$:

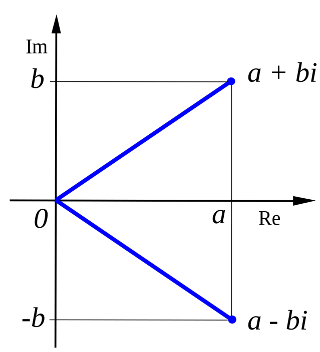
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2-3j)(-1+4j) \\ &= -2 + 8j + 3j - 12j^2 \\ &= -2 + 11j - 12 \times (-1) \end{aligned} \quad j^2 = -1$$

Nous savons donc calculer la somme et le produit de deux nombres complexes.

Afin de calculer l'inverse d'un nombre complexe nous aourons besoin de la notion de conjugué d'un nombre complexe.

Definition 1
Le **conjugué** d'un nombre complexe $z = a + jb$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par

$$\boxed{\overline{z} = a - jb}$$

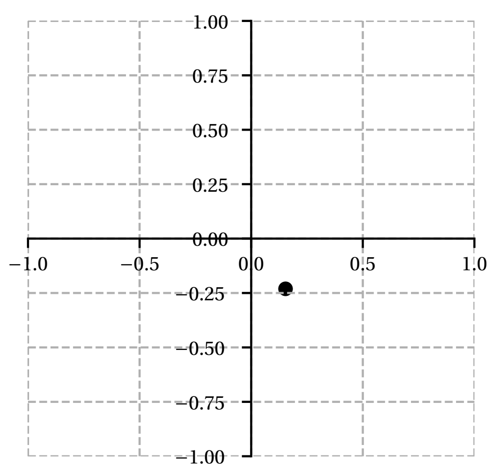


On peut maintenant aborder le calcul de l'inverse d'un nombre complexe.

Exemple 1.3
Soit le nombre complexe $z = 2 + 3j$. Calculons son inverse:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{3+3j} && \textit{On multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur} \\
&= \frac{1 \times (2-3j)}{(2+3j)(2-3j)} && \textit{On applique l'identité remarquable } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\
&= \frac{2-3j}{2^2 - 9j^2} && j^2 = -1 \\
&= \frac{2-3j}{4 - 9 \times (-1)} \\
&= \frac{2-3j}{13} \\
&= \frac{2}{13} - \tfrac{3}{13} j
\end{aligned}
$$

On a donc obtenu la forme algébrique de $\frac{1}{z} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} j$ c'est-à-dire que l'on peut donner sa partie réelle $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{13}$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{3}{13}$ et que l'on peut alors le placer dans le plan complexe:



A remarquer: en général, pour tout nombre complexe $z = a + jb$,

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+jb)(a-jb) \quad \textit{identité remarquable} \\ &= a^2 - (jb)^2 \\ &= a^2 - b^2 \times (-1) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{z\overline{z} = a^2 + b^2}$ et $z\overline{z}$ est toujours un nombre réel positif. On doit toujours obtenir un nombre positif au dénominateur de $\frac{1}{z}$ après multiplication par le conjugué.

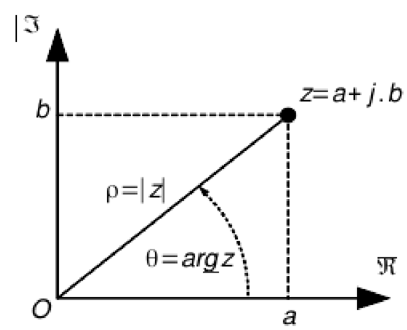
Calculons maintenant un quotient de deux nombres complexes en utilisant la même technique.

Exemple 1.4
Voici un calcul de quotient:

$$\begin{aligned} \frac{1-2j}{-2-5j} &= \frac{(1-2j)(-2+5j)}{-2-5j)(-2+5j)} \\ &= \frac{-2+5j+4j-10j^2}{4-25j^2} \\ &= \frac{-2+9j-10\times(-1)}{4-25\times(-1)} \\ &= \frac{8+9j}{29} \\ &= \frac{8}{29} + \frac{9}{29}j \end{aligned}$$

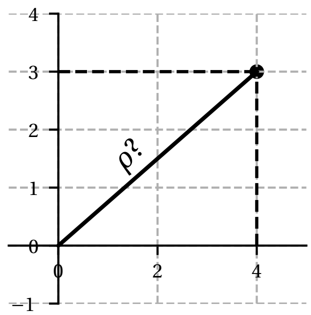
2 Module et argument

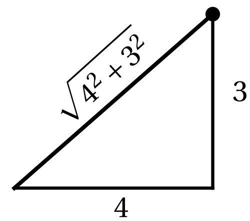
Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$, et l'argument, noté Arg(z) sont définis par la figure ci-dessous:



2.1 Calcul du module

Exemple 2.1
Considérons le nombre complexe $z = 4 + 3j$: D'après le théorème de Pythagore





$$\rho = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Le module de z est donc $|z| = 5$.

En général si $z = a + jb$ le module de z se calcule par:

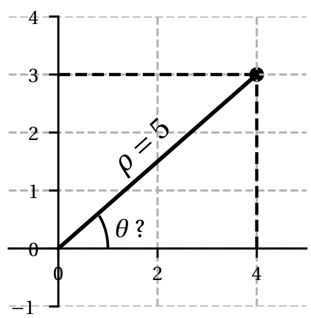
$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

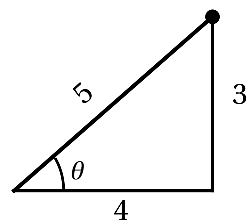
<u>Remarque:</u> nous avons vu précédemment que $z\overline{z} = a^2 + b^2$ donc

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$$

2.2 Calcul de l'argument

Exemple 2.2
Reprenons le nombre complexe $z = 4+3i$ D'après la trigonométrie dans les triangles





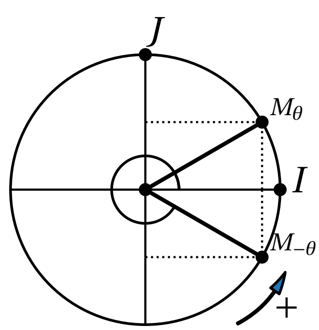
rectangles:

$$\cos\theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{a}{\rho} = \frac{4}{5}$$
$$\sin\theta = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{b}{\rho} = \frac{3}{5}$$

Par conséquent avec $\cos\theta = \frac{4}{5}$ on obtient

$$\theta = \pm\text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right) \approx \pm 0,6$$

il y a un $\pm$ devant le résultat donné par le Arccos car pour un même cosinus donné il y a deux angles possibles (ce que ne dit pas la calculatrice):



Pour savoir si l'angle est 0,6 ou -0,6 il suffit de regarder le sinus: ici comme $\sin\theta > 0$ alors θ est positif,

$$\text{Arg}(z) \approx 0,6$$

En général si $z = a + jb$ pour calculer l'argument θ du nombre complexe z:

1. Calculer le module du nombre complexe z:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ avec les formules:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\rho} \end{array}\right.} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array}\right.$$

3. Calculer $\pm\theta$ en calculant l'Arccosinus du cosinus que vous venez de trouver.

4. Conclure en donnant le signe de θ:

   - Si $\sin\theta \geq 0$ alors $\theta \geq 0$
   - Si $\sin\theta \leq 0$ alors $\theta \leq 0$

3 La forme exponentielle

3.1 Définition

Nous avons vu que $a = \rho\cos\theta$ et que $b = \rho\sin\theta$ donc

$$\begin{aligned} z &= a + jb \\ &= \rho\cos\theta + j\rho\sin\theta \\ &= \rho\left(\cos\theta + j\sin\theta\right) \\ &= \rho e^{j\theta} \end{aligned}$$

Notation: $\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta}$

C'est alors l'écriture $z = \rho e^{j\theta}$ qui est appelé $\boxed{\text{la forme exponentielle}}$ du nombre complexe z.

Exemple 3.1
pour $z = 4+3j$ on avait trouvé $\begin{cases} \rho = 5 \\ \theta = 0,6 \end{cases}$ Sa forme exponentielle est donc

$$z = e^{0,6j}$$

Il est en général plus facile de passer de la forme exponentielle (FE) à la forme algébrique (FA): il suffit d'utiliser la définition de $e^{j\theta}$ comme nous allons le voir dans l'exemple suivant:

Exemple 3.2
Considérons $z = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$

$$\begin{aligned} 2e^{j\frac{\pi}{4}} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} + j\sqrt{2} \end{aligned}$$

Considérons quelques autres exemples.

Exemple 3.3
Considérons les nombres complexes de module 1 et d'arguments 0, $\frac{\pi}{2}$ et π:

$$\begin{aligned} 1e^{0j} &= \cos(0) + j\sin(0) = 1 + 0j = 1 \\ 1e^{j\frac{\pi}{2}} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1j = j \\ 1e^{\pi j} &= \cos(\pi) + j\sin(\pi) = -1 + 0j = -1 \end{aligned}$$

Remarquons la très belle égalité:

$$\boxed{e^{j\pi} + 1 = 0}$$

3.2 Calcul avec la forme exponentielle

La forme exponentielle n'est pas bien adaptée pour calculer les sommes de nombres complexes. Par contre elle est bien adaptée au calcul des quotients et des produits.

Si $\begin{cases} z_1 = \rho e^{j\theta} \\ z_2 = r e^{jx} \end{cases}$.

Alors

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho e^{j\theta} r e^{jx} \\ &= (\rho r) e^{j\theta} e^{jx} \\ &= (\rho r) e^{j(\theta + x)} \end{aligned}$$

Exemple 3.4
Considérons le produit suivant:

$$\left(2e^{j\dfrac{\pi}{4}}\right) \times \left(5e^{j\dfrac{\pi}{3}}\right) = 10e^{j\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)} = 10e^{j\dfrac{7\pi}{12}}$$

La formule ci-dessus revient à dire que

$$\begin{cases} |z_1 z_2| & = |z_1| \times |z_2| \\ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) & = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \end{cases}$$

Pour le quotient:

$$\frac{\rho e^{j\theta}}{r e^{jx}} = \frac{\rho}{r} e^{j(\theta - x)}$$

ce qui revient à dire que

$$\begin{cases} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2) \end{cases}$$

Exemple 3.5
Reprenons l'exemple précédent:

$$2e^{j\frac{\pi}{4}} 5e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{5} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{5} e^{-j\frac{\pi}{12}}$$