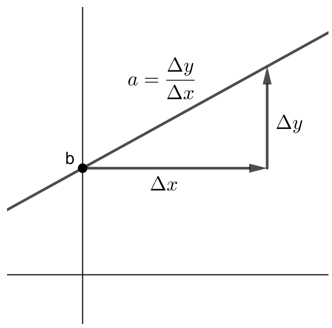
1 Fonctions usuelles

1.1 Affines

Ce sont les fonctions du type $f(x) = ax+b$ avec $\begin{cases} a : \text{pente ou coefficient directeur} \\ b : \text{ordonnée à l'origine (O.A.O.)} \end{cases}$.

Graphiquement:



Exemple 1.1
Considérons la fonction $f(x) = 4x - 8$
Cette fonction est croissante car la pente 4 est positive.

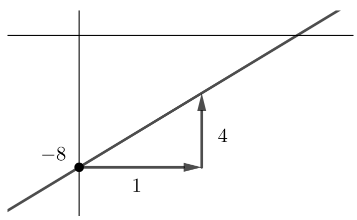


Tableau de signe de $4x - 8$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$4x-8$		$-$	0	$+$	

<u>Détails:</u> racine de la fonction $f(x) = 4x - 8$

$$\begin{aligned} 4x - 8 = 0 &\iff 4x = 8 \\ &\iff x = \frac{8}{4} \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

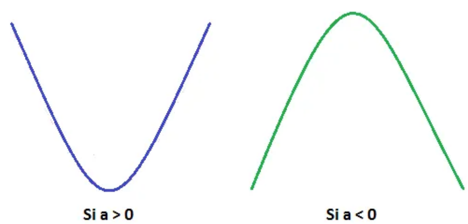
Exercice 1.1
Faire les TdS de

1. $f(x) = 2x + 4$
2. $f(x) = -3x + 9$

1.2 Trinômes du second degré

Ce sont les fonctions du type: $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Exemple 1.2
Considérons la fonction $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$.
Ce type de fonction sont des paraboles. Les paraboles peuvent être des parabole en U ou en A selon le signe du coefficient a:



Ici parabole en U car le $a = 2 > 0$.
Le tableau de signe est donc:

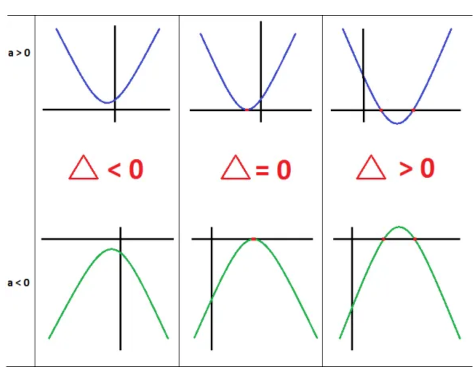
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Détails: racines de la fonction $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$

- Calcul du **discriminant**:

$$\Delta = \boxed{b^2 - 4ac} = 2^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 4 + 32 = 36$$

- Comme $\Delta > 0$ alors il y a deux racines:



Ces racines sont alors

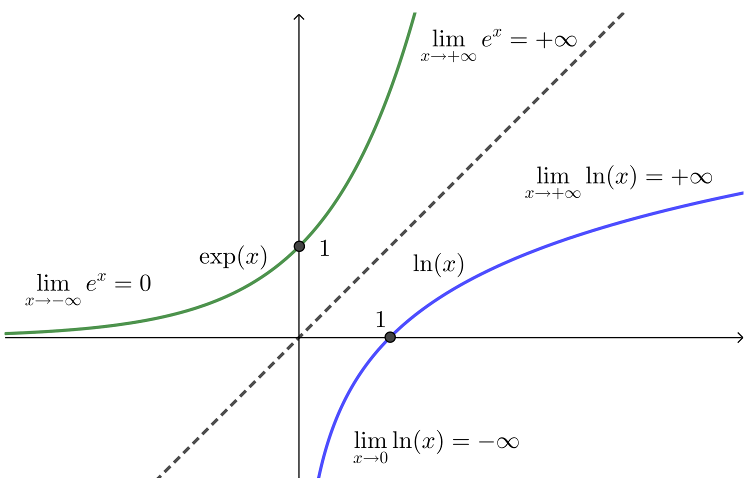
$$r_1 = \boxed{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 2} = -2$$
$$r_2 = \boxed{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} = \frac{-2+\sqrt{36}}{2\times 2} = 1$$

Exercice 1.2
Faire le TdS de

1. $3x^2 + 9x - 30$
2. $-2x^2 + 4x + 12$
3. $2x^2 - 4x + 3$

1.3 Exponentielle et logarithme: courbes

Les fonctions exponentielles et logarithme ont les courbes représentatives suivantes:



Remarque 1
On remarque deux choses importantes sur ce graphiques:

- La fonction logarithme $\ln(x)$ n'est pas définie pour les x négatifs. Par exemple $\ln(-5)$ n'a pas de sens.
- La fonction exponentielle n'est jamais négative. Par exemple $\exp(-5)$ est positive.

Attention à ne pas confondre les deux, ce qui revient à confondre x et y dans $f(x) = y$:

- Avec $\ln(x) = y$ on a forcément $x > 0$ c.a.d. l'antécédent x est forcément positif.
- Avec $\exp(x) = y$ on a forcément $y > 0$ c.a.d. l'image est forcément positive.

1.4 Exponentielle et logarithme: propriétés

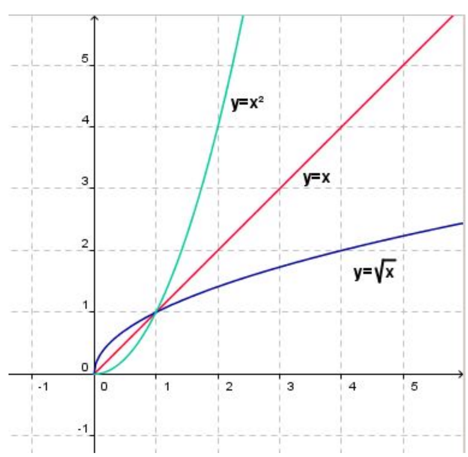
- $\exp(x)$ est la puissance e^x: c'est un nombre $e \simeq 2,7$ que l'on prend à la puissance x.
  Par exemple: $\exp(2) = e^2 \approx 2,7^2 \approx 7,3$.
  Par conséquent: $\begin{cases} \boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b} \leftarrow \text{ comme } 2^2 \times 2^{”} = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^5 \\ e^{-a} = \frac{1}{e^a} \\ e^0 = 1 \\ e^1 = e \approx 2,7 \end{cases}$
- $\ln(x)$ c'est le **logarithme néperien**.
  Il est de la même famille que le **logarithme décimal** $\log(x)$:

  $$\log(100) = 2$$
  $$\log(1 \text{ milliard}) = 9 \rightarrow \log(100 \times 1000) = \log(100\,000) = 5 = 2 + 3 = \log(100) + \log(1000)$$

  Cela est vrai également pour le logarithme néperien:

  $$\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$$
  $$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

- Les courbes de exp et de ln sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (la bissectrice), tout comme les fonction x^2 et $\sqrt{x}$



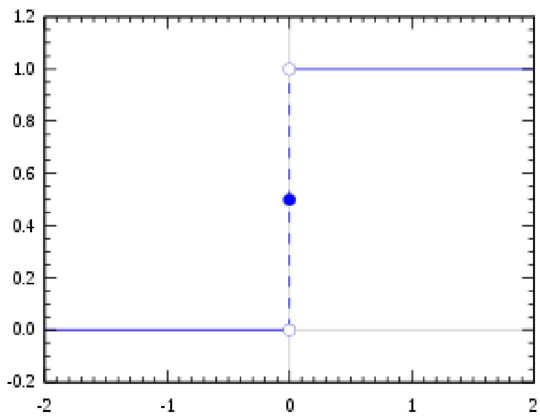
On dit que deux telles fonctions sont **réciproques** l'une de l'autre.
Tout comme pour x^2 et $\sqrt{x}$ on a donc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} e^x = a & \Longleftrightarrow & x = \ln(a) \\ \ln(x) = a & \Longleftrightarrow & x = e^a \end{array}}$$

Ce qui revient à $e^{\ln(x)} = x$ et $\ln(e^x) = x$.

1.5 Echelons

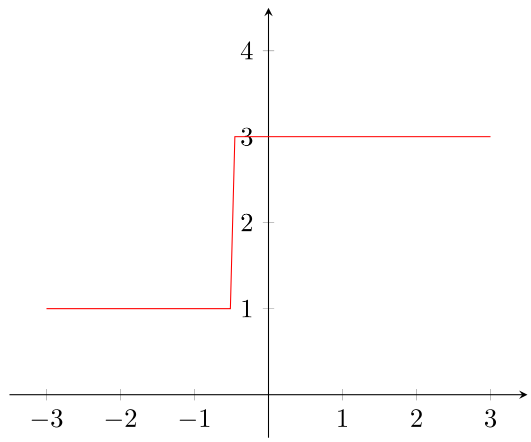
Echelon de **Heaviside** $H(t)$:



C'est une fonction **définie par morceaux**:

$$H(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Exemple 1.3
Considérons la fonction $f(t) = 2H(2t+4)+1$.
Si $2t+4 > 0$ c.a.d. $t > -\dfrac{1}{2}$ alors $H(2t+4) = 1$ donc $f(t) = 3$.
Inversement si $2t+4 < 0$ c.a.d. $t < -\dfrac{1}{2}$ alors $H(2t+4) = 0$ donc $f(t) = 1$
La représentation graphique de cette fonction est donc:



Exercice 1.3
Tracer la fonction $3H(5t-10)+2$.

2 Dérivées

2.1 Tableau 1: dérivées des fonctions usuelles

f	f'	formule
constante	0	$a' = 0$
x	1	$x' = 1$
x^2	$2x$	$(x^2)' = 2x$
x^n	nx^{n-1}	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^n n+1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin' = \cos$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos' = -\sin$
e^x	e^x	$(e^x)' = e^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

2.2 Tableau 2: dérivées et opérations

f	f'	Exemple
$a \times u$	au'	$(3\cos(x))' = 3(\cos(x))' = 3 \times (-\sin(x)) = -3\sin(x)$
$u + v$	$u' + v'$	$(\ln(x) + \sqrt{x})' = (\ln(x))' + (\sqrt{x})' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
uv	$\boxed{u'v + uv'}$	$(x^2\sin(x))' = (x^2)'\sin(x) + x^2(\sin(x))' = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(\dfrac{1}{\sin(x)}\right)' = -\dfrac{(\sin(x))'}{(\sin(x))^2} = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)' = \dfrac{(x^3)'\sin x - x^3(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \dfrac{3x^2\sin x - x^3\cos x}{\sin^2 x}$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$	$(\ln(\cos x))' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x}$
e^u	$u'e^u$	$\left(e^{3x+1}\right)' = (3x+1)'e^{3x+1} = 3e^{3x+1}$

3 Etude des fonctions

Cela signifie tracer la courbe représentative de la fonction.
Pour cela on utilise la dérivée:

- Si f' est positive alors la fonction f est croissante
- Si f' est négative alors la fonction f est décroissante

3.1 Exemple 1

Considérons la fonction suivante:

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

1 Ensemble de définition de f: pas de valeurs interdites (V.I.) donc

$$\text{Def}(f) = \mathbb{R}$$

2 Dérivée:

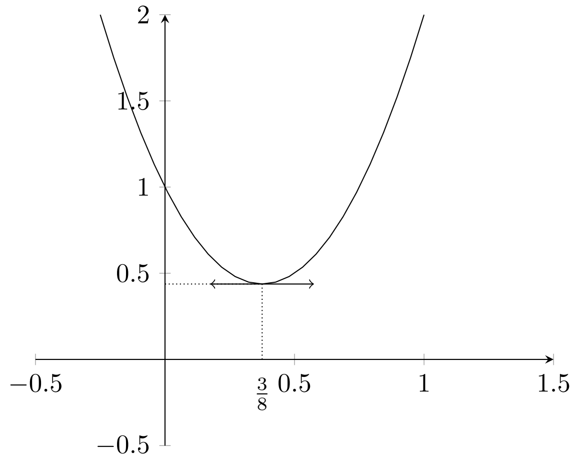
$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^2 - 3x + 1)' \\ &= 4(x^2)' - 3x' + 1' \\ &= 4 \times 2x - 3 \times 1 + 0 \\ &= 8x - 3 \end{aligned}$$

3 TdSV:

x	$-\infty$		$\frac{3}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-0.4	$\nearrow$	

Détail: $f\left(\frac{3}{8}\right) = 4 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{8} + 1 \approx 0,4$

4 Allure de la courbe:



Détail:

$$f(0) = 4 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$$

3.2 Exemple 2

Considérons la fonction $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

1. Ensemble de définition: $\text{Def}(g) = \mathbb{R}$

2. Dérivée:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x^3 + 3x^2 - 12x)' \\ &= 2(x^3)' + 3(x^2)' - 12x' \\ &= 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12 \times 1 \\ &= 6x^2 + 6x - 12 \end{aligned}$$

3. TdSV: Calcul des racines de $g'(x)$:

   - Calcul de Δ:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 324 > 0 \end{aligned}$$

   - Calcul des racines:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{324}}{2 \times 6} = \frac{-6 - 18}{12} = -2 \\ r_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{324}}{2 \times 6} = \frac{-6 + 18}{12} = 1 \end{aligned}$$

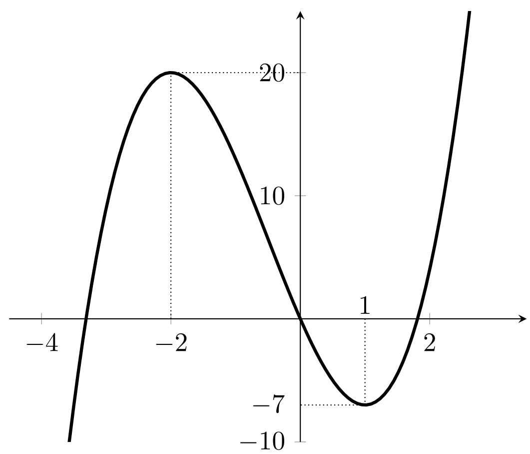
   On peut alors en déduire le TdSV:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$	

<u>Détail:</u>

- Image de -2 par g: $g(-2) = \ldots = 20$
- Image de 1 par g: $g(1) = 2 + 3 - 12 = -7$

4 <u>Allure de la C.R.:</u>



<u>Image de 0:</u> $g(0) = \ldots = 0$