1 Equations différentielles

1.1 Exemples - Vocabulaire

Exemple 1.1
Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y'(x) - 2y(x) = 4x$$

Dans cette équation:

- La lettre y désigne la fonction inconnue: c'est ce qu'il faut trouver
- La lettre x désigne la variable de la fonction y.

Lorsque c'est possible, on n'écrit pas la variable x. On notera ainsi plutôt l'équation différentielle de la manière suivante:

$$y' - 2y = 4x$$

Vérifions maintenant qu'une solution à cette équation est $y = -2x - 1$:

$$\begin{aligned} y' - 2y &= (-2x-1)' - 2(-2x-1) \\ &= -2 + 4x + 2 \\ &= 4x \end{aligned}$$

Exemple 1.2
Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y'' + y = sin(\omega t)$$

Dans cette équation la fonction inconnue est toujours y, mais la variable est t. La lettre ω désigne un **paramètre** c'est-à-dire qu'il faut le considérer comme un nombre.
Vérifions qu'une solution à cette équation est $y = \dfrac{1}{1-\omega^2}\sin(\omega t)$. Calculons d'abord y':

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1-\omega^2}(\sin(\omega t))' \\ &= \frac{1}{1-\omega^2}(\omega t)'\cos(\omega t) \\ &= \frac{\omega}{1-\omega^2}\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Calculons ensuite y'':

$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= \left(\frac{\omega}{1-\omega^2}\cos(\omega t)\right)' \\ &= \frac{\omega}{1-\omega^2}(\cos(\omega t))' \\ &= \frac{\omega}{1-\omega^2}(-\omega\sin(\omega t)) \\ &= -\frac{\omega^2}{1-\omega^2}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} y'' + y &= -\frac{\omega^2}{1-\omega^2}\sin(\omega t) + \frac{1}{1-\omega^2}\sin(\omega t) \\ &= \left(-\frac{\omega^2}{1-\omega^2} + \frac{1}{1-\omega^2}\right)\sin(\omega t) \\ &= \frac{1-\omega^2}{1-\omega^2}\sin(\omega t) \\ &= \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Exemple 1.3
Considérons l'équation $yy' = e^x$ de fonction inconnue y et de variable x.
Vérifions qu'une solution est $y = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}x}$:

$$\begin{aligned} yy' &= \left(\sqrt{2}e^{\dfrac{1}{2}x}\right)\left(\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}x}\right)' \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}x\right)' e^{\frac{1}{2}x} \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{2}\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}x}e^{\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{2}{2}e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x} \\ &= e^x \end{aligned}$$

Vocabulaire 1.1
A écrire en marge de chaque exemple:

- L'équation différentielle (E.D.) du premier exemple est une E.D.:
  - d'ordre 1: il n'y a que des y et y'
  - linéaire: pas de multiplication entre les y et y'
- L'E.D. du deuxième exemple est une E.D.:

  - d'ordre 2: la dérivation va jusqu'au y''
  - linéaire

- L'E.D. du troisième exemple est une E.D.:
  - d'ordre 1
  - **non** linéaire: il y a multiplication entre y et y'

1.2 Principe de superposition

Le principe de superposition est une propriété qui s'applique aux E.D. linéaires.

Exemple 1.4
Soit (E) l'E.D. suivante:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Une solution est $y_1 = e^x$ car

$$y_1'' - 2y_1' + y_1 = e^x - 2e^x + e^x = 0$$

Une autre solution est $y_2 = 3y_1$ car

$$\begin{aligned}(3y_1)'' - 2(2y_1)' + (3y_1) &= 3y_1'' - 2 \times 3 \times y_1' + 3y_1 \\ &= 3(y_1'' - 2y_1' + y_1) \\ &= 3 \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

En général: **si y est une solution d'une ED linéaire (E.D.L.) alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la fonction αy sera encore une solution de** (E).

Par conséquent: si $\mathrm{Sol}(E) \neq \emptyset$ alors il y aura une infinité de solutions.

Une autre solution est $y_3 = xe^x$:

$$\begin{aligned}y_3 &= xe^x \\ y_3' &= x'e^x + x(e^x)' \\ &= 1e^x + xe^x \\ &= (1+x)e^x \\ y_3'' &= (1+x)'e^x + (1+x)(e^x)' \\ &= e^x + (1+x)e^x \\ &= (2+x)e^x\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}y_3'' - 2y_3' + y_3 &= (2+x)e^x - 2(1+x)e^x + xe^x \\ &= (2 + x - 2 - 2x + x)e^x \\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $y_1 = e^x$ et $y_3 = xe^x$ sont des solutions de (E) et que (E) est une EDL alors $y = y_1 + y_3$ est également une solution:

$$\begin{aligned}(y_1 + y_3)'' - 2(y_1 + y_3)' + (y_1 + y_3) &= y_1'' + y_3'' - 2y_1' - 2y_3' + y_1 + y_3 \\ &= y_1'' - 2y_1' + y_1 + y_3'' - 2y_3' + y_3 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

En général, la principe de superposition nous dit: **si** y_1 **et** y_2 **sont des solutions d'une EDL** (E) **alors la fonction** y_1+y_2 **est également une solution de l'EDL** (E).

1.3 Vocabulaire des E.D.L.

Une E.D.L. s'écrit de manière générale sous la forme suivante:

$$a_n(t)y^{(n)} + \ldots + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

Exemple 1.5
Dans l'EDL suivante

$$t^2y^{(3)} + \cos(t)y'' - 3y' = e^t$$

on a les coefficients:

$$a_3(t) = t^2,\ a_2(t) = \cos(t),\ a_1(t) = -3,\ a_0(t) = 0$$

Dans l'équation générale:

- n s'appelle **l'ordre** de l'EDL
- $a_0(t), a_1(t), \ldots$ s'appelle les **coefficients**
- $f(t)$ s'appelle le **second membre** de l'EDL

Si les coefficient $a_0, a_1, \ldots$ ne dépendent pas de t on dit que l'EDL est à **coefficients constants**.

Exemple 1.6
L'EDL suivante est d'ordre 2 et à coefficients constants:

$$4y'' - 2y' + y = t^2$$

Son second membre est t^2.

Exemple 1.7
L'EDL suivante:

$$t^2y' + 3y = 0$$

n'est pas à coefficients constants car $a_1(t) = t^2$ n'est pas constant.
Par contre son second membre est nul. On dit qu'une telle EDL est **sans second membre** ou **homogène**.

2 Résolution des EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Dans les section précédentes nous avons vérifié des solution d'E.D. qui était donnée par l'enseignant. Dans cette section nous allons apprendre à trouver ces solutions.

2.1 ESSM: EDL sans second membre

Exemple 2.1
Résolvons l'équation $y' - 2y = 0$:

$$\begin{aligned} & y' - 2y = 0 \\ \iff & y' = 2y \\ \iff & y = \alpha e^{2t}, \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La dernière ligne est justifiée par le fait que l'on cherche une fonction qui, quand on la dérive donne deux fois elle-même: c'est le cas pour la fonction $y = e^{2t}$:

$$y' = \left(e^{2t}\right)' = (2t)'e^{2t} = 2e^{2t} = 2y$$

Il en va de même des multiples de $y = e^{2t}$ d'après le principe de superposition.

Théorème 1. *Les solution de l'ESSM $y' - ay = 0$ (c.a.d. $y' = ay$) sont les fonctions $y = \alpha e^{at}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.*
La solution $y = \alpha e^{at}$ s'appelle la ***solution générale*** *de l'EDL.*

On peut démontrer ce théorème en raisonnant comme le physiciens, de la manière suivante:

$$\begin{aligned} y' = ay \iff & \frac{dy}{dt} = ay \\ \iff & dy = adt \\ \iff & \frac{dy}{y} = adt \\ \iff & \int \frac{dy}{y} = \int adt \\ \iff & \ln y = at + \text{cst} \\ \iff & y = e^{at+\text{cst}} \\ \iff & y = e^{\text{cst}} e^{at} \\ \iff & y = \alpha e^{at} \text{ en posant } \alpha = e^{\text{cst}} \end{aligned}$$

Exemple 2.2
Considéront l'EDL (E_2) suivante:

$$
\begin{aligned}
& 5y' + 3y = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & y' = -\frac{3}{5}y \\
\Longleftrightarrow\ & y = \alpha e^{-\frac{3}{5}t},\ \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

2.2 Résolution des EDL à coefficients constants d'ordre 1

Exemple 2.3
Considérons l'EDL suivante:

$$(E): \ y' - 2y = 4$$

1. On recherche d'abord une **solution particulière** y_P: une bonne méthode est de recercher y_P sous la même forme que le second membre.
   Ici le second membre est 4 qui est une fonction constante: on prend $y_P = \alpha \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} y_P' - 2y_P = 4 &\iff \alpha' - 2\alpha = 4 \\ &\iff 0 - 2\alpha = 4 \\ &\iff \alpha = -2 \end{aligned}$$
   Par conséquent $y_P = -2$ est une solution particulière.
2. On donne ensuite la solution générale de **l'ESSM associée**:
   $$\begin{aligned} & y' - 2y = 0 \\ \iff & y' = 2y \\ \iff & y = \alpha e^{2t} \end{aligned}$$
   Par conséquent $y_{\text{ESSM}} = \alpha e^{2t}$.
3. La solution générale de l'EDL (E) est alors
   $$\boxed{y = y_{\text{ESSM}} + y_P}$$
   Ce qui donne ici
   $$y = \alpha e^{2t} - 2$$

Exemple 2.4
Considérons l'EDL suivante:

$$3y' + 2y = 5$$

1. Solution particulière: avec $y_P = \alpha \in \mathbb{R}$ on a
   $$\begin{aligned} 3\alpha' + 2\alpha = 5 &\iff 2\alpha = 5 \\ &\iff \alpha = \frac{5}{2} \end{aligned}$$
   Par conséquent $y_P = \dfrac{5}{2}$.
2. Solution générale de l'ESSM:
   $$\begin{aligned} 3y' + 2y = 0 &\iff y' = -\frac{2}{3}y \\ &\iff y = \alpha e^{-\frac{2}{3}t} \end{aligned}$$
   Par conséquent $y_{\text{ESSM}} = \alpha e^{-\frac{2}{3}t}$.

3. Solution générale:

$$y = y_{\text{ESSM}} + y_P = \boxed{\alpha^{-2/3t} + \frac{5}{2}}$$

2.3 Avec second membre non constant

Exemple 2.5
On considère l'EDL suivante:

$$y' + 2y = 3t - 1$$

1. SP: Ici le second membre est affine donc on cherche $y_P = at + b$: nous allons procéder par **identification**,

$$\begin{aligned} & (at+b)' + 2(at+b) = 3t - 1 \\ \iff & a + 2at + 2b = 3t - 1 \\ \iff & 2at + 2b + a = 3t - 1 \\ \iff & \begin{cases} 2a = 3 \\ 2b + a = -1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

   donc $y_P = \dfrac{3}{2}t - \dfrac{5}{4}$.

2. ESSM:

$$\begin{aligned} & y' + 2y = 0 \\ \iff & y' = -2y \\ \iff & y = \alpha e^{-2t} \end{aligned}$$

   donc $y_{\text{ESSM}} = \alpha e^{-2t}$

3. Solution générale:

$$y = y_{\text{ESSM}} + y_P = \boxed{\alpha e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}}$$

Exemple 2.6
On considère l'EDL suivante:

$$y' + 3y = 2\cos(2t)$$

1. SP: ici le second membre est trigonométrique de pulsation $\omega = 2$ donc on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_P = A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

   On réintroduit cette solution particulière dans l'équation pour déterminer les constante A et B: nous procéderons encore par **identification**

$$\begin{aligned}
& y' + 3y = \cos(2t) \\
\iff & -A \times 2\sin(2t) + B \times 2\cos(2t) + 3A\cos(2t) + 3B\sin(2t) = \cos(2t) \\
\iff & \cos(2t)(2B+3A) + \sin(2t)(-2A+3B) = \cos(2t) \\
\iff & \begin{cases} 3A + 2B = 2 \\ -2A + 3B = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 3A + 2B = 2 \\ 2(L_1) + 3(L_2) : 13B = 4 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} A = \frac{2-2B}{3} = \frac{2-\frac{8}{13}}{3} = \frac{18}{39} \\ B = \frac{4}{13} \end{cases}
\end{aligned}$$

donc $y_P = \dfrac{18}{39}\cos(2t) + \dfrac{4}{13}\sin(2t)$.

2. ESSM:

$$\begin{aligned}
& y' + 3y = 0 \\
\iff & y' = -3y \\
\iff & y = \alpha e^{-3t}
\end{aligned}$$

donc $y_{\text{ESSM}} = \alpha e^{-3t}$.

3. SG:

$$y = y_{\text{ESSM}} + y_P = \boxed{\alpha e^{-3t} + \frac{18}{39}\cos(2t) + \frac{4}{13}\sin(2t)}$$