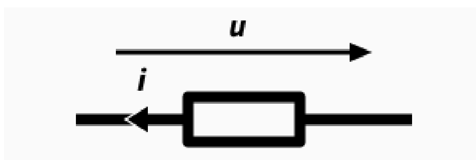
OML2 - Chapitre 1: Application des nombres complexes

Gabriel Soranzo

1 Calcul des valeurs efficaces

Définition 1
La valeurs efficace d'une tension $u(t)$ périodique de periode T est l'intensité d'un courant continu U constant qui dissipe la même énergie que $u(t)$ en passant dans une resistance.

Calculons la tension efficace:



On a avec t_0 quelconque ($u(t)$ étant periodique, cela n'a pas d'importance),

$$\begin{aligned} E_{t_0 \to t_0+T} &= \frac{U^2}{R} \times T \text{ si } U \text{ est constant} \\ &= \frac{1}{R} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\, dt \text{ si } u \text{ n'est pas constant} \end{aligned}$$

donc à energie constante,

$$\frac{1}{R} U^2 T = \frac{1}{R} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\, dt$$

donc

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\, dt}$$

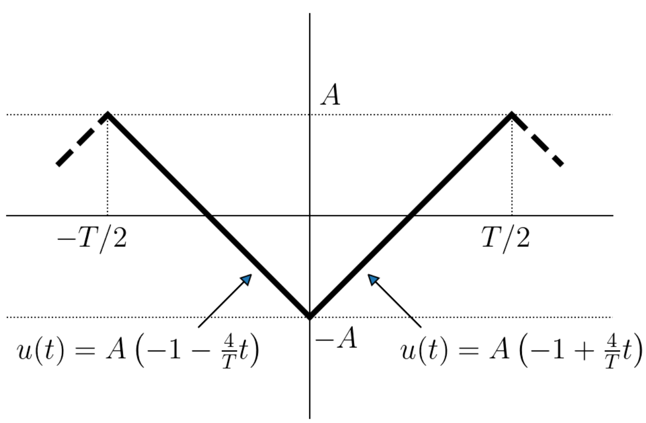
Exemple 1.1
Calculons la valeur efficace d'un signal sinusoïdal $V(t) = A\sin(\omega t)$

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,dt &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2\sin^2(\omega t)\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2\left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right)\,dt \\ &= \frac{A^2}{T}\left(\int_0^T \frac{1}{2}\,dt + \int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2}\,dt\right) \\ &= \frac{A^2}{T}\left(\left[\frac{t}{2}\right]_0^T + 0\right) \\ &= \frac{A^2}{T}\left(\frac{T}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

donc $U_{\text{eff}}^2 = \frac{A^2}{2}$ et $\boxed{U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}}$.

Par exemple la tension du secteur a une valeur efficace de 230V donc $U_{\text{eff}} =$ 230V. L'amplitude de la tension est donc $A = 230\sqrt{2} \approx 325$V.

Exemple 1.2
Calculons la valeur efficace d'un signal triangulaire T-periodique d'amplitude A:



$$u(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{4}{T}t\right) & \text{si } t \in [0, \pi/2[\\ A\left(1 + \frac{4}{T}t\right) & \text{si } t \in [-\pi/2, 0[\end{cases}$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)\,dt \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} A^2\left(1-\frac{4}{T}t\right)^2 dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} A^2\left(1+\frac{4}{T}t\right)^2 dt\right) \\
&= \frac{A^2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} 1+\frac{8}{T}t+\frac{16}{T^2}t^2\,dt + \int_{0}^{T/2} 1-\frac{8}{T}t+\frac{16}{T^2}t^2\,dt\right) \\
&= \frac{A^2}{T}\left(\left[t+\frac{4}{T}t^2+\frac{16}{3T^2}t^3\right]_{-T/2}^{0} + \left[t-\frac{4}{T}t^2+\frac{16}{3T^2}t^3\right]_{0}^{T/2}\right) \\
&= \frac{A^2}{T}\left(0-\left(-\frac{T}{2}+T-\frac{4T}{3}\right)+\frac{T}{2}-T+\frac{4T}{3}\right) \\
&= \frac{A^2}{T}2\times\frac{T}{6} \\
&= \frac{A^2}{3}
\end{aligned}$$

Par conséquent $U_{\text{eff}}^2 = \frac{A^2}{3}$ et $\boxed{U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{3}}}$.

Exemple 1.3
Calculons enfin la valeurs efficace d'un signal carré T-periodique d'amplitude A:

$$u(t) = \begin{cases} A \text{ si } t \in [0, T/2[\\ -A \text{ si } t \in [-T/2, 0[\end{cases}$$

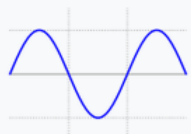
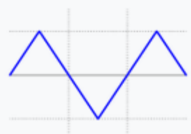
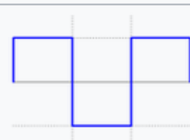
On a alors,

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)\,dt \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} A^2\,dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} A^2\,dt\right) \\
&= \frac{A^2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} 1\,dt + \int_{0}^{T/2} 1\,dt\right) \\
&= \frac{A^2}{T}\left([t]_{-T/2}^{0} + [t]_{0}^{T/2}\right) \\
&= \frac{A^2}{T}\left(0-\left(-\frac{T}{2}\right)+\frac{T}{2}\right) \\
&= \frac{A^2}{T}2\times\frac{T}{2} \\
&= A^2
\end{aligned}$$

Par conséquent $U_{\text{eff}}^2 = A^2$ et $\boxed{U_{\text{eff}} = A}$.

Le tableau suivant résume les trois cas étudiés dans les exemples ci-dessus:

Relations entre la valeur maximale et la valeur efficace pour des tensions alternatives de forme simple.

Signal (régime établi)	Forme d'onde	*U*
sinusoïdal		$\frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$
triangulaire		$\frac{U_{\max}}{\sqrt{3}}$
carré et symétrique		$U_{\max}$

Source: Wikipedia

2 Somme de signaux sinusoïdaux

Nous allons voir que la somme de signaux sinusoïdaux **de mêmes fréquences** (mais éventuellement déphasés) redonne un signal sinusoïdal.

2.1 Méthode analytique

Calculons par exemple le signal résultant de l'addition de $s_1(t) = 2\cos(\omega t)$ et de $s_2(t) = \sin(\omega t + \pi/3)$:

$$\begin{aligned}
s_1(t) + s_2(t) &= 2\cos(\omega t) + \sin(\omega t + \pi/3) \\
&= 2\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\cos(\pi/3) + \cos(\omega t)\sin(\pi/3) \\
&= 2\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\tfrac{1}{2} + \cos(\omega t)\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \left(2 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos(\omega t) + \tfrac{1}{2}\sin(\omega t) \\
&= \tfrac{1}{2}\left((4+\sqrt{3})\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right) \qquad \varphi = \arctan(4+\sqrt{3}) \approx 1.40 \\
&= \tfrac{1}{2}(\tan\varphi\cos(\omega t) + \sin(\omega t) \\
&= \tfrac{1}{2\cos\varphi}(\sin\varphi\cos(\omega t) + \cos\varphi\sin(\omega t)) \\
&= \tfrac{1}{2\cos\varphi}\sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}$$

Si l'on veut exprimer ce signal en terme de cosinus on utilise la formule $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x) = \cos(x - \pi/2)$:

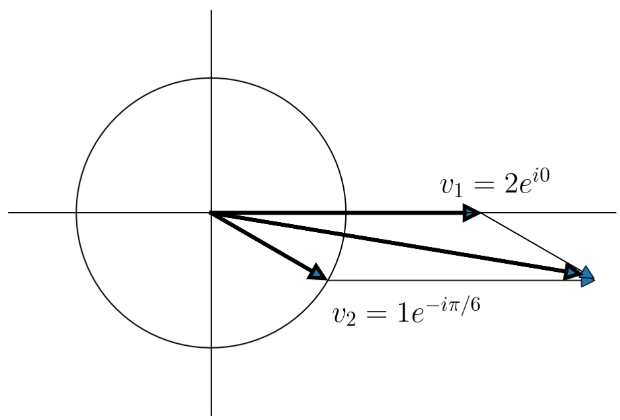
$$s_1(t) + s_2(t) = \frac{1}{2\cos\varphi}\cos(\omega t + \varphi - \pi/2) \approx 2,9\cos(\omega t - 0,17)$$

2.2 Méthode De Fresnel - méthode complexe

Pour appliquer la méthode de Fresnel il faut que tous les signaux soient en termes de cosinus. On réécrit donc s_2 en termes de cosinus avec la formule vue dans la sous-section précédente:

$$s_2(t) = \sin(\omega t + \pi/3) = \cos(\omega t + \pi/3 - \pi/2) = \cos(\omega t - \pi/6)$$

On peut alors faire le tracé de Fresnel



Le vecteur somme est alors $v_3 = 2.9e^{-i0.17}$ ce qui redonne le même résultat que dans la sous-section précédente.