OML2 - Chapitre 2: Décomposition en éléments simples

Gabriel Soranzo

1 Division euclidienne de polynômes

Exemple 1.1
Division euclidienne de $P(x) = x^2 + 3x + 1$ par $A(x) = x - 2$

$$\begin{array}{rr|l}
x^2 + 3x & +1 & x - 2 \\ \cline{3-3}
-\,x^2 + 2x & & x + 5 \\ \cline{1-1}
5x & +1 & \\
\multicolumn{2}{r}{-\,5x + 10} & \\ \cline{1-2}
 & 11 &
\end{array}$$

On a donc $\underbrace{x^2 + 3x + 1}_{\text{Dividende}} = \underbrace{(x-2)}_{\text{Diviseur}}\underbrace{(x+5)}_{\text{Quotient}} + \underbrace{11}_{\text{Reste}}$.

Exemple 1.2
Considérons la division de $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 8x^2 + x + 3$ par $D(x) = x^2 - 2x + 3$.

$$\begin{array}{rrr|l}
3x^4 - 5x^3 + 8x^2 & +x & +3 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{4-4}
-\,3x^4 + 6x^3 - 9x^2 & & & 3x^2 + x + 1 \\ \cline{1-1}
x^3 \;\; - x^2 & +x & & \\
-\,x^3 + 2x^2 & -3x & & \\ \cline{1-2}
x^2 & -2x & +3 & \\
-\,x^2 & +2x & -3 & \\ \cline{1-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

On a donc $3x^4 - 5x^3 + 8x^2 + x + 3 = x^2 - 2x + 3 \times (3x^2 + x + 1)$. Le reste vaut donc 0: on dit que $P(x)$ **divise** $D(x)$.

Notation 1
On notera $P(x) \mid D(x)$ lorsque le polynôme $P(x)$ divise le polynôme $D(x)$.

Remarque 1
C'est la même situation que pour les nombres entiers:

$$7 = 3 \times 2 + 1 \text{ donc } 3 \nmid 7$$

$$18 = 2 \times 9 + 0 \text{ donc } 2 \mid 18 \text{ car le reste est nul}$$

Remarque 2
Dans tous les cas le degré du polynôme reste est **strictement** plus petit que le polynôme diviseur (sinon on pourrait continuer la division).
Division euclidienne de $P(x)$ par $D(x)$:

$$\boxed{\begin{array}{r} P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \\ \deg(R(x)) < \deg(D(x)) \end{array}}$$

Exemple 1.3 (Division par un $x - \alpha$)
Faisons la division euclidienne du polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ par le polynôme $D(x) = x - 3$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 & x - 3 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 6x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + 3x - 2 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 11x \quad\;\; & \\ -3x^2 \;\; + 9x \quad\;\; & \\ \cline{1-1} -2x + 6 & \\ 2x - 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

On constate que $x - 3 \mid P(x)$ car il y a un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 3)Q(x)$.

Remarque 3
On a donc

$$P(3) = (3 - 3) \times Q(3) = 0 \times Q(3) = 0$$

Théorème 1. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $P(x)$ un polynôme.*

1. *Si $x - \alpha \mid P(x)$ alors $P(\alpha) = 0$ c'est-à-dire que $P(x)$ s'annule en $x = \alpha$, ce qui revient à dire que le nombre α est une **racine** du polynôme $P(x)$.*

2. *Si $P(\alpha) = 0$ alors $x - \alpha \mid P(x)$.*

Proof. 1. Si $x - \alpha \mid P(x)$ alors $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + 0$ donc

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0 \times Q(\alpha) = 0$$

2. En posant la division euclidienne on a

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R(x)$$

Comme $\deg(R(x)) < \deg(x - \alpha)$ alors $\deg(R(x)) = 0$ c'est-à-dire que $R(x)$ est un nombre. Notons par conséquent $R(x) = \beta$. La division euclidienne divient alors

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + \beta$$

Utilisons alors que $P(\alpha) = 0$ dans la division euclidienne:

$$P(\alpha) = 0 \text{ et } P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + \beta$$

comme $(\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$ alors cela donne

$$P(\alpha) = 0 \text{ et } P(\alpha) = \beta$$

on en déduit donc que le reste β est égal à 0 ce qui revient à dire que $x - \alpha \mid P(x)$.

$\square$

2 Application à la recherche des racines d'un polynôme

Exemple 2.1
Cherchons les **racines** du polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + x - 3$. Il y a une racine "évidente" c'est $x = 1$, vérifions:

$$P(1) = 1^3 + 1^2 + 1 - 3 = 3 - 3 = 0$$

D'après le théorème 1 on est alors sûr que le polynôme $x - 1$ va diviser le polynôme $P(x)$.
Cherchons le quotient:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & +x & -3 & x-1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+2x+3 \\
\cline{1-2}
 & 2x^2 & +x & & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\
\cline{2-3}
 & & 3x & -3 & \\
 & & -3x & +3 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

On a donc $P(x) = (x - 1) \times (x^2 + 2x + 3)$.
Cela va nous permettre de trouver toutes les racines du polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + x - 3$:

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff x - 1 = 0 \text{ ou } x^2 + 2x + 3 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x^2 + 2x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Il nous faut donc résoudre $x^2 + 2x + 3 = 0$:

$$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times 3 = -8 \text{ donc } x = \frac{-2 \pm i\sqrt{8}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Par conséquent

$$P(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1 + i\sqrt{2} \text{ ou } x = -1 - i\sqrt{2}$$

Exemple 2.2
Recherchons les racines du polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$. Pour cela commençons par rechercher une racine évidente...c'est $x = -2$ car

$$P(-2) = -8 + 4 + 6 - 2 = 0$$

D'après le théorème 1 on sait alors que $x - (-2) \mid P(x)$ c'est-à-dire que $x + 2 \mid P(x)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -3x & -2 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2-x-1 \\ \cline{1-2}
 & -x^2 & -3x & & \\
 & x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & -x & -2 & \\
 & & x & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

On en déduit alors toutes les racines par le même raisonnement que précédemment,

$$
\begin{aligned}
P(x) = 0 &\iff (x+2)(x^2 - x - 1) = 0 \\
&\iff x + 2 = 0 \text{ ou } x^2 - x - 1 = 0 \\
&\iff x = -2 \text{ ou } x^2 - x - 1 = 0 \qquad \Delta = 1 + 4 = 5 \\
&\iff x = -2 \text{ ou } x = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

3 Décomposition en éléments simples (D.E.S.) - Niveau 1

Il est facile de calculer une somme de deux fraction de polynômes (ce type de fonction s'appelle une **fraction rationnelle**) du type suivant:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+3}=\frac{x+3+2(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}$$

La décomposition en éléments simple consiste à faire l'inverse: à partir du terme de droite, essayer de retrouver le terme de gauche.

Exemple 3.1

Soit la fraction rationnelle $f(x)=\dfrac{4x+3}{(x+2)(x+1)}$ Pour décomposer la fonction $f(x)$ nous allons rechercher les deux coefficients a et b vérifiant la relation suivante:

$$\frac{4x+3}{(x+2)(x+1)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+1}$$

Développons le terme de droite:

$$\begin{aligned}\frac{4x+3}{(x+2)(x+1)}&=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+1}\\&=\frac{a(x+1)+b(x+2)}{(x+2)(x+1)}\\&=\frac{(a+b)x+a+2b}{(x+2)(x+1)}\end{aligned}$$

Nous allons alors déterminer les coefficients a et b **par identification**:

$$\frac{\boxed{4}x+\boxed{3}}{(x+2)(x+1)}=\frac{\boxed{\text{(a+b)}}\,x+\boxed{\text{a+2b}}}{(x+2)(x+1)}$$

On en déduit donc **par identification** le **système d'équations** suivant:

$$\begin{aligned}\begin{cases}a+b=4\,(L_1)\\a+2b=3\,(L_2)\end{cases}&\iff\begin{cases}a+b=4\\(L_2)-(L_1):\ b=-1\end{cases}\\&\iff\begin{cases}a+(-1)=4\\b=-1\end{cases}\\&\iff\begin{cases}a=5\\b=-1\end{cases}\end{aligned}$$

Il s'en suit que la D.E.S. de la fraction rationnelle $\frac{4x+3}{(x+2)(x+1)}$ est

$$\frac{4x+3}{(x+2)(x+1)}=\frac{5}{x+2}+\frac{-1}{x+1}$$

Exemple 3.2
Procédons de même à la D.E.S. de la fonction $g(x) = \dfrac{x}{(x-7)(x+3)}$. On recherche les coefficients a et b tels que

$$\frac{x}{(x-7)(x+3)} = \frac{a}{x-7} + \frac{b}{x+3}$$

Comme précédemment on développe le terme de droite:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-7)(x+3)} &= \frac{a}{x-7} + \frac{b}{x+3} \\ &= \frac{a(x+3)+b(x-7)}{(x-7)(x+3)} \\ &= \frac{(a+b)x+3a-7b}{(x-7)(x+3)}\end{aligned}$$

On procède alors par identification:

$$\frac{\boxed{1}x+\boxed{0}}{(x-7)(x+3)} = \frac{\boxed{\text{(a+b)}}x+\boxed{\text{3a-7b}}}{(x-7)(x+3)}$$

ce qui donne donc le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l} a+b=1\,(L_1) \\ 3a-7b=0\,(L_2)\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ (L_2)-3(L_1)\ :\ -10b=-3\end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} a=1-b=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10} \\ b=\frac{3}{10}\end{array}\right.\end{aligned}$$

La D.E.S. de la fonction $g(x)$ est donc:

$$\frac{x}{(x-7)(x+3)} = \frac{7/10}{x-7} + \frac{3/10}{x+3}$$

Remarque 4
Une autre méthode est possible pour déterminer les DES. Reprenons l'exemple 1:

$$\frac{4x+3}{(x+2)(x+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$$

L'astuce est de multiplier cette égalité par $x+2$:

$$\frac{(4x+3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+1)} = \frac{a\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{b(x+2)}{x+1}$$

ce qui nous donne donc

$$\frac{4x+3}{x+1} = a + \frac{b(x+2)}{x+1}$$

On peut alors déterminer le coefficient a en évaluant cette égalité en $x = -2$:

$$\frac{4 \times (-2) + 3}{-2 + 1} = a + \cancel{\frac{b(-2+2)}{-2+1}}$$

On en déduit donc que $a = 5$ en simplifiant l'expression de gauche.
Pour déterminer le coefficient b on va procéder de la même manière: on mulitplie par $x + 1$ et on évalue en $x = -1$: en multipliant par $x + 1$ l'égalité de départ on obtient

$$\frac{4x + 3}{x + 2} = \frac{a(x + 1)}{x + 2} + b$$

Puis on évalue en $x = -1$ afin de faire disparaitre le coefficient a, ce qui donne

$$\frac{4 \times (-1) + 3}{-1 + 2} = 0 + b$$

ce qui nous donne après simplification $b = -1$. On retrouve donc les mêmes valeurs de a et b qu'avec la première méthode vue dans l'exemple 1 et la DES est donc la même.

Remarque 5
Traitons de même l'exemple 2 avec la nouvelle méthode, en allant un peu plus vite. On a

$$\frac{x}{(x - 7)(x + 3)} = \frac{a}{x - 7} + \frac{b}{x + 3}$$

donc après multiplication par $x - 7$ puis évaluation en $x = 7$,

$$\frac{x}{x + 3} = a + \dots \text{ donc } \frac{7}{7 + 3} = a \text{ c.a.d. } a = \frac{7}{10}$$

et de même après multiplication par $x + 3$ puis évaluation en $x = -3$

$$\frac{x}{x - 7} = \dots + b \text{ donc } \frac{-3}{-3 - 7} \text{ c.a.d. } b = \frac{3}{10}$$

ce qui redonne les coefficients que nous avions déjà trouvés.

4 Application aux intégrales - Niveau 1

Exemple 4.1
Calculons l'intégrale suivante:

$$\int_8^9 \frac{x}{(x-7)(x+3)}\,dx$$

D'après la DES ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
\int_8^9 \frac{x}{(x-7)(x+3)}\,dx &= \int_8^9 \frac{7/10}{x-7} + \frac{3/10}{x+3}\,dx \\
&= \int_8^9 \frac{7/10}{x-7}dx + \int_8^9 \frac{3/10}{x+3}\,dx \\
&= \frac{7}{10}\int_8^9 \frac{dx}{x-7} + \frac{3}{10}\int_8^9 \frac{dx}{x+3} \\
&= \frac{7}{10}\left[\ln(x-7)\right]_8^9 + \frac{3}{10}\left[\ln(x+3)\right]_8^9 \\
&= \frac{7}{10}\left(\ln(9-7) - \ln(8-7)\right) + \frac{3}{10}\left(\ln(9+3) - \ln(8+3)\right) \\
&= \frac{7}{10}\left(\ln(2) - \ln(1)\right) + \frac{3}{10}\left(\ln(12) - \ln(11)\right) \\
&= \frac{7}{10}\ln(2) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{12}{11}\right)
\end{aligned}$$

5 DES - niveau 2

5.1 Numérateur de degré supérieur ou égal au dénominateur

Exemple 5.1

La fraction rationnelle $\dfrac{x^2+x+1}{(x+2)(x+1)}$ ne peut pas se mettre sous la forme $\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+1}$ car cela donnerait

$$\frac{(a+b)X+a+2b}{(x+2)(x+1)}$$

ce qui ne pourrait pas convenir car cela donnerait un numérateur de degré 1.
La solution est de faire d'abord une division euclidienne:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+1)} &= \frac{(x^2+3x+2)Q(x)+R(x)}{x^2+3x+2}\\ &= \frac{\cancel{(x^2+3x+2)}Q(x)}{\cancel{x^2+3x+3}}+\frac{R(x)}{(x+2)(x+1)}\\ &= Q(x)+\frac{R(x)}{(x+2)(x+1)}\end{aligned}$$

On va alors faire la DES de $\frac{R(x)}{(x+2)(x+1)}$ ce qui est possible car $R(x)$ est forcément de degré plus petit que $(x+2)(x+1)$ car il est issu de la division euclidienne par ce dernier.

- Division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} x^2 \quad +x+1 & x^2+3x+2 \\ \cline{2-2} -x^2-3x-2 & 1 \\ \cline{1-1} -2x-1 & \end{array}$$

  On a donc
  $$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+1)} = 1-\frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}$$

- Décomposition en éléments simples de $\dfrac{2x+1}{(x+2)(x+1)}$

  $$\frac{2x+1}{(x+2)(x+1)} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+1}$$

  Détermination du coefficient a: multiplication par $x+2$,

  $$\frac{2x+1}{x+1} = a+\dots_{|x=-2} \text{ donc } a=\frac{-3}{-1}=3$$

  Détermination du coefficient b: multiplication par $x+1$,

  $$\frac{2x+1}{x+2} = \dots+b_{|x=-1} \text{ donc } b=\frac{-1}{1}=-1$$

- Conclusion: DES de $f(x)$,

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+1)} &= 1-\frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}\\ &= 1-\left(\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)\\ &= 1-\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

5.2 Dénominateurs avec des facteurs au carré

Exemple 5.2
Considérons la fraction rationnelle $f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)}$.

La DES ne peut pas être de la forme habituelle $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ car cela donnerait un dénominateur du type $(x+1)(x+2)$: il manquerait le carré sur le $x+1$. Nous allons rechercher une DES sous la forme

$$\boxed{\tfrac{a}{(x+1)^2}}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$

(Voir l'exemple suivant pour un autre exemple de décomposition)

- Recherche du c: comme d'habitude on mulitiplie par $x+2$ et l'on évalue en $x=-2$

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = \ldots + c_{x=-2} \text{ donc } c+0+0=\frac{1}{1} \text{ donc } \boxed{c=1}$$

- Recherche du a: afin d'annuler le b et le c il convient de mulitiplier par $(x+1)^2$:

$$\frac{x+3}{x+2} = a+\frac{b(x+1)^2}{x+1}+\frac{c(x+1)^2}{x+2}$$

donc

$$\frac{x+3}{x+2} = a+b(x+1)+\frac{c(x+1)^2}{x+2}$$

et l'on voit donc que l'évaluation en $x=-1$ annule tous les termes sauf le a,

$$\frac{2}{1} = a+0+0 \text{ donc } \boxed{a=2}$$

- Recherche du b: la méthode de multiplier par $x+1$ ne fonctionnera pas car on ne pourra pas évaluer en $x=-1$ pour annuler le a car il restera un $x+1$ au dénominateur. Comme il ne reste plus que le b à déterminer on peut évaluer l'égalité de départ en un nombre quelconque (facile à calculer) par exemple en $x = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{0+3}{(0+1)^2(0+2)} &= \frac{2}{(0+1)^2} + \frac{b}{0+1} + \frac{1}{0+2} \\ &\iff \frac{3}{2} = 2 + b + \frac{1}{2} \\ &\iff \boxed{b = -1}\end{aligned}$$

En conclusion la DES de la fonction $f(x)$ est

$$\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

Exemple 5.3
Pour bien comprendre sous quelle forme il faut chercher la DES voici un autre exemple:

$$\frac{x^2+4}{(x+1)^3(x+5)^2} = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(b-1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x+5)^2} + \frac{e}{x+5}$$

Exemple 5.4
Un dernier exemple complet. Soit $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2(x+1)}$

- Division euclidienne de $x^4 + 1$ par $x^2(x+1) = x^3 + x^2$

$$\begin{array}{rr|l} x^4 & +1 & x^3 + x^2 \\ \cline{3-3} -x^4 - x^3 & & x-1 \\ \cline{1-1} -x^3 & & \\ x^3 + x^2 & & \\ \cline{1-2} & x^2 + 1 & \end{array}$$

  On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)(x^2(x+1)) + x^2 + 1}{x^2(x+1)} \\ &= x - 1 + \frac{x^2+1}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

- Décomposition en éléments simples de

$$\boxed{\frac{x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}}\ (*)$$

  - Recherche du c: on multiplie par $x + 1$ puis on évalue en $x = -1$,

$$\frac{x^2+1}{x^2} = \ldots + c_{|x=-1} \text{ donc } \frac{2}{1} = 0 + C \text{ donc } \boxed{c = 2}$$

- Recherche du a: on multiplie par x^2 et on évalue en $x = 0$,

$$\frac{x^2+1}{x+1} = a + \ldots_{|x=0} \text{ donc } \frac{1}{1} = a + 0 \text{ donc } \boxed{a = 1}$$

- On évalue l'égalité $(*)$ par exemple en $x = 1$,

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{1} + \frac{b}{1} + \frac{2}{2} \text{ donc } \boxed{b = -1}$$

- On a donc

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$$

- Le DES de la fonction $f(x)$ est donc

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)} = x - 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$$

6 Bilan provisoire

Pour faire la DES de la fraction rationnelle $\dfrac{P(X)}{D(X)}$ on procède comme suit:

1. Si $\deg(P(X)) \geq \deg(D(X))$: on fait la division euclidienne de $P(X)$ par $D(X)$ ce qui donne $P(X) = D(X) \times Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg(D(X))$. On a alors en divisant de chaque côté par $D(X)$:

$$\frac{P(X)}{D(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{D(X)}$$

   et l'on peut alors faire la DES de $\dfrac{R(X)}{D(X)}$.

2. Si le polynôme $Q(X)$ n'est pas sous une forme factorisée il convient de factoriser le polynôme $Q(X)$.

   - Si $Q(X)$ est un polynôme de degré 2 c'est-à-dire $Q(X) = aX^2+bX+c$ on peut le factoriser en utilisant le discriminant puis en calculant ses racines. Sa forme factorisée est alors

$$Q(X) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

   - Si $Q(X)$ est de degré strictement plus grand que 2 alors nous avons vu la technique de rechercher des racines évidentes r puis de faire la division euclidienne de $Q(X)$ par $X - r$.
   - Même si l'on ne trouve pas de racines évidentes, il est en théorie (théorème de d'Alembert-Gauss) toujours posible de factoriser un polynôme $Q(X)$ en un produit

$$Q(X) = a(X - r_1)^{k_1}(X - r_2)^{k_2} \dots (X - a_n)^{k_n}$$

     où les racines r_i sont des nombres complexes. Mais cela peut nécessiter en pratique des recherches numériques de racines c'est-à-dire des approximations.

3. On écrit alors la DES sous la forme:

$$\begin{aligned}\frac{R(X)}{Q(X)} = D(X) &+ \frac{\text{nombre}}{X - r_1} + \frac{\text{nombre}}{(X - r_1)^2} + \dots + \frac{\text{nombre}}{(X - r_1)^{k_1}} \\ &+ \frac{\text{nombre}}{X - r_2} + \frac{\text{nombre}}{(X - r_2)^2} + \dots + \frac{\text{nombre}}{(X - r_2)^{k_2}} \\ &\dots \\ &+ \frac{\text{nombre}}{X - r_n} + \frac{\text{nombre}}{(X - r_n)^2} + \dots + \frac{\text{nombre}}{(X - r_n)^{k_n}}\end{aligned}$$

4. On calcule les numérateurs par

- Développement, identification, résolution de systèmes: long mais fonctionne toujours
- Multiplication par un $(X-r)^k$ puis évaluation en r
- Evaluation en un nombre facilitant le calcul (par exemple $X=0$, $X=1$)

7 DES Réelle

Problème: il y a parfois dans les DES des nombres complexes.

7.1 Exemple 1

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

La factorisation du polynôme x^2+1: racines i et $-i$ donc factorisation

$$x^2+1 = (x-i)(x+i)$$

Par conséquent la DES de la fonction $f(x)$ est du type

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-i} + \frac{c}{x+i}$$

et l'on a

$$a = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)_{|x=0} = 1$$
$$b = \left(\frac{1}{x(x+i)}\right)_{|x=i} = -\frac{1}{2}$$
$$c = \left(\frac{1}{x(x-i)}\right)_{|x=-i} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi la DES (complexe) de la fonction $f(x)$ est-elle

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1/2}{x-i} - \frac{1/2}{x+i}$$

Afin d'obtenir une DES réelle nous allons mettre ensemble les deux fractions complexes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{x+i}{(x-i)(x+i)} + \frac{x-i}{(x-i)(x+i)}\right) \quad = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{x\cancel{+i}+x\cancel{-i}}{x^2+1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \end{aligned}$$

Les DES réelles que nous obtiendront seront toujours de cette forme: en mettant ensemble les fractions à dénominateurs conjugués on obtient des fractions du type

$$\frac{ax+b}{\text{polynôme de degré 2}}$$

7.2 Exemple 2

Considérons la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x^2+x+2)}$$

Comme $\Delta_{x^2+x+2} = 1 - 4 \times 2 = -7 < 0$ alors le polynôme x^2+x+2 n'a pas de racines réelles et donc il ne se factorise pas avec des nombres réels. Par conséquent la DES de la fonction f est du type

$$f(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2+x+2}$$

- **Méthode 1 (long - si on a le temps):** passer par la DES complexe
  - Factorisation de x^2+x+2 dans $\mathbb{C}$: on a $\Delta = -7$ donc les racines sont $r = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $\overline{r} = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et la factorisation est alors

    $$x^2+x+2 = a(x-r)(x-\overline{r}) = \boxed{(x-r)(x-\overline{r})}$$

  - La DES complexe de la fonction f est alors

    $$f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x-r)(x-\overline{r})} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-r} + \frac{c}{x-\overline{r}}$$

  - **Remarque:** comme f est une fonction avec que des coefficients réels alors

    $$\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-r} + \frac{c}{x-\overline{r}} = f = \overline{f} = \frac{\overline{a}}{x-3} + \frac{\overline{b}}{x-\overline{r}} + \frac{\overline{c}}{x-r}$$

    Par identification nous avons donc

    $$\left\{\begin{array}{l} a = \overline{a} \\ b = \overline{c} \\ \overline{b} = c \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ c = \overline{b} \end{array}\right.$$

    Théorème 2. *Dans les DES complexes, si la fonction de départ est réelle alors les fractions de dénominateurs conjugués ont des numérateurs également conjugués.*

  - Calcul du coefficient a:

    $$a = \frac{x+1}{x^2+x+2}_{|x=3} = \frac{4}{3^2+3+2} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

  - Calcul du coefficient b:

    $$b = \frac{x+1}{(x-3)(x-\overline{r})}_{|x=r} = \underbrace{\ldots}_{\text{exo}} = -\frac{1}{7}$$

– Calcul du coefficient c: d'après ce que nous avons vu ci-dessus

$$c = \overline{b} = \overline{-\frac{1}{7}} = -\frac{1}{7}$$

– La DES complexe est donc:

$$f(x) = \frac{2/7}{x-3} - \frac{1/7}{x-r} - \frac{1/7}{x-\overline{r}}$$

– Calcul de la DES réelle: on met ensemble les fractions conjuguées

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2/7}{x-3} - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{x-r} + \frac{1}{x-\overline{r}}\right) \\
&= \frac{2/7}{x-3} - \frac{1}{7}\frac{x-\overline{r}+x-\overline{r}}{x^2+x+2} \\
&= \frac{2/7}{x-3} - \frac{1}{7}\frac{2x-\overbrace{(r+\overline{r})}^{2\mathrm{Re}(r)}}{x^2+x+2} \\
&= \frac{2/7}{x-3} - \frac{1}{7}\frac{2x-2\left(-\frac{1}{2}\right)}{x^2+x+2} \\
&= \frac{2/7}{x-3} - \frac{1}{7}\frac{2x+1}{x^2+x+2} \\
&= \boxed{\frac{2/7}{x-3} + \frac{-2/7x-1/7}{x^2+x+2}}
\end{aligned}$$

- **Méthode 2:** recherche directe sans passer par la DES complexe. On recherche directement les coefficients a, b et c tels que

$$\frac{x+1}{(x-3)(x^2+x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx+c}{x^2+x+2}$$

  - Calcul du coefficient a: idem que dans la méthode précédent $a = \frac{2}{7}$.
  - Calcul du coefficient c: on remplace par une valeur de x qui fait disparaitre le coefficient b... c'est $x = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{(x-3)(x^2+x+2)}_{|x=0} = \frac{2/7}{x-3}_{|x=0} + \frac{bx+c}{x^2+x+2}_{|x=0} \\ \iff & \frac{1}{-3\times 2} = \frac{2/7}{-3} + \frac{b\times 0+c}{2} \\ \iff & \frac{c}{2} = -\frac{1}{2\times 3} + \frac{2}{3\times 7} \\ \iff & c = 2\left(\frac{-7+2\times 2}{2\times 3\times 7}\right) = \frac{-3}{3\times 7} = -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

  - Calcul du coefficient b: comme il n'y a que le coefficient b qui reste à calculer alors on peut évaluer en un x quelconque (pas une valeur interdite ni une valeur qui fait disparaitre le b) par exemple $b = -1$ (comme cela le terme de gauche égale 0):

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{(x-3)(x^2+x+2)}_{|x=-1} = \frac{2/7}{x-3}_{|x=-1} + \frac{bx-1/7}{x^2+x+2}_{|x=-1} \\ \iff & 0 = \frac{2/7}{-4} + \frac{-b-1/7}{2} \\ \iff & 0 = -\frac{2}{7} - 2b - \frac{2}{7} \\ \iff & 0 = -2 - 14b - 2 \\ \iff & b = \frac{4}{-14} = -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

  - Calcul du coefficient b par la méthode de la "limite": on va multiplier par x et faire tendre x vers $+\infty$: supposons que l'on ne connaisse pas b, alors

$$\frac{x+1}{(x-3)(x^2+x+2)} = \frac{2/7}{x-3} + \frac{bx-1/7}{x^2+x+2}$$

    Multiplions par x à gauche et à droite:

$$\frac{x(x+1)}{(x+3)(x^2+x+2} = \frac{2/7\,x}{x-3} + \frac{bx^2-1/7\,x}{x^2+x+2}$$

On fait tendre x vers $+\infty$: seuls les termes de plus haut degrés sont importants:

$$\underbrace{\frac{x^2}{x^3}_{|x\to+\infty}}_{\frac{1}{x}_{|x\to+\infty}=0} = \frac{2/7\,\cancel{x}}{\cancel{x}}_{|x\to+\infty} + \frac{b\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}_{|x\to+\infty} \iff \quad 0 = \frac{2}{7} + b \iff b = -\frac{2}{7}$$

- Conclusion: identique

7.3 Exemple 3 - Retour sur l'exemple 1

Refaisons l'exemple 1 avec la nouvelle méthode

7.4 Exemple 4 - En cas de besoin

Nous allons voir maintenant un exemple où la technique des valeurs bien choisies ne fonctionne pas.

Considérons la fraction rationnelle suivante:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}$$

Comme $\Delta_{x^2+1} = 0 - 4 \times 1 = -4 < 0$ alors le polynôme x^2+1 n'a pas de factorisation réelle. La DES réelle de la fonction f est donc

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

- Calcul du coefficient b: technique habituelle

$$b = \frac{x-1}{x^2+1}_{|x=0} = \frac{-1}{1} = -1$$

- Calcul de c et d: le technique d'évaluation en 0 et en ∞ de l'exemple précédent ne fonctionnent plus car il reste le coefficient a qui n'est pas déterminé (et on ne peut pas déterminer a pour la même raison). Nous allons procéder comme pour les coefficients habituels en multipliant par le dénominateur de $cx+d$ et en évaluant en $x =$une racine.
  - Racines de x^2+1: facile ici, pas la peine de calculer le Δ ce sont les nombres complexes i et $-i$.
  - On multiplie tout le DES par x^2+1 puis on évalue en $x = i$:

$$\frac{x-1}{x^2}_{|x=i} = \frac{a(x^2+1)}{x}_{|x=i} + \frac{b(x^2+1)}{x^2}_{|x=i} + (cx+d)_{|x=i}$$
$$\iff \frac{i-1}{-1} = 0 + 0 + ci + d$$
$$\iff 1 - i = d + ci$$

  En raisonnant par identification on a donc $\begin{cases} d = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

- Calcul du coefficient a: comme c'est le dernier coefficient on peut le déterminer par évaluation en en nombre quelconque, bien choisi pour faciliter les calculs. Par exemple $x = 1$ annule le terme de gauche dans la DES:

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)}_{|x=1} = \frac{a}{x}_{|x=1} + \frac{-1}{x^2}_{|x=1} + \frac{-x+1}{x^2+1}_{|x=1}$$
$$\iff 0 = a - 1 + \xcancel{\frac{-1+1}{2}}$$
$$\iff a = 1$$

- Conclusion: la DES réelle est donc

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

8 Application des DES au calcul d'intégrales

Exemple 8.1
Calculons l'intégrale

$$\int_3^4 \frac{4x+1}{(x+1)(x-2)^2}\,dx$$

1. Calcul de la DES:

$$\frac{4x+1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$$

   - Calcul du coefficient a:

$$a = \frac{4x+1}{(x-2)^2}_{|x=-1} = \frac{-4+1}{(-3)^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

   - Calcul du coefficient c:

$$c = \frac{4x+1}{x+1}_{|x=2} = \frac{9}{3} = 3$$

   - Calcul du coefficient b: on peut évaluer en un nombre quelconque ou appliquer la méthode de la "limite". Faisons la méthode de la limite: On mulitplie par x et on fait tendre x vers $+\infty$

$$\begin{aligned}
&\frac{x(4x+1)}{(x+1)(x-2)}_{|x\to+\infty} = \left(\frac{ax}{x+1} + \frac{bx}{x-2} + \frac{cx}{(x-2)^2}\right)_{|x\to+\infty} \\
\iff &\frac{4x^2}{x^3}_{|x\to+\infty} = \frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}}_{|\infty} + \frac{b\cancel{x}}{\cancel{x}}_{|\infty} + \frac{cx}{x^2}_{|\infty} \\
\iff &\frac{4}{x}_{|\infty} = a_{|\infty} + b_{|\infty} + \frac{c}{x}_{|\infty} \\
\iff &0 = a + b + 0 \\
\iff &b = -a = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   - Conclusion:

$$f(x) = \frac{-1/3}{x+1} + \frac{1/3}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

2. Calcul de l'intégrale:

$$
\begin{aligned}
\int_3^4 f(x)\,dx &= \int_3^4 \frac{-1/3}{x+1} + \frac{1/3}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{x-2}\,dx + 3\int_3^4 (x-2)^{-2}\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\left[\ln(x+1)\right]_3^4 + \frac{1}{3}\left[\ln(x-2)\right]_3^4 + 3\left[\frac{(x-2)^{-1}}{-1}\right]_3^4 \\
&= -\frac{1}{3}(\ln 5 - \ln 4) + \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 1) - 3\left[\frac{1}{x-2}\right]_3^4 \\
&= \frac{1}{3}(-\ln 5 + \ln 4 + \ln 2) - 3\left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right) + \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$