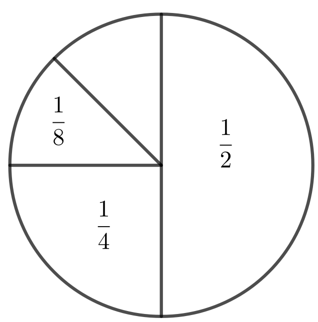
OML2 - Chapitre 3: Séries et formule de Taylor

Gabriel Soranzo

1 Série de nombres

Definition 1
Une série de nombre désigne une somme infinie.

Exemple 1.1
Considérons la série
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$$
Le schéma suivant nous permet de trouver la valeur de cette somme infinie:



On a donc
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=1$$
On le note
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1 \text{ ou bien } \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2^k}=1$$
On dit que la série **converge**.
Moralité: une somme infinie de nombres peut donner un résultat fini! Il faut pour cela que les **termes** de la série tendent vers 0.

Exemple 1.2
Si les termes (positifs) de la suite ne tendent pas vers 0 on aura un résultat infini. Par exemple
$$1+2+4+8+\dots=+\infty$$

ce qui se note

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = +\infty \text{ ou bien } \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k = +\infty$$

On dit dans ce cas que la série **diverge fortement**.

Remarque 1
Il n'est pas suffisant que les termes de la série tendent vers 0 pour que la série converge. Par exemple on peut montrer que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = +\infty$$

c'est en gros parce que les termes de la suite ne tendent pas assez vite vers 0 (les termes de la suite du premier exemple sont beaucoup plus petits).

Exemple 1.3
il y a enfin des séries qui n'ont pas de valeurs limite. Par exemple:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

on ne peut pas vraiment donner de valeurs à cette somme infinie car prenons les premiers termes:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1 - 1 &= 0 \\
1 - 1 + 1 &= 1 \\
1 - 1 + 1 - 1 &= 0 \\
1 - 1 + 1 - 1 + 1 &= 1 \\
1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 &= 0
\end{aligned}$$

On voit que les **sommes partielles** ne se rapprochent pas d'une valeur limite mais alternent entre deux valeurs. On dit que ce type de série **diverge**.

2 La série de Taylor associé à une fonction f

Les série de Taylor sont des série de fonction, c'est-à-dire une série où les termes sont des fonctions (il y a des x). Par exemple la série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

est une série qui dépend de la variable x et pour cette raison la somme de la série est elle-même une fonction

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Les séries de fonctions ont une convergence qui dépend de x. Avec l'exemple de la série $S(x)$ ci-dessus on peut montrer que

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \in]-1;1[\\ +\infty & \text{si } x \geq 1 \\ \text{diverge} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

L'idée des séries de Taylor est d'essayer de calculer les fonctions en les rapprochant des polynômes (ou de polynômes infini: des **séries entières**). Par exemple on aimerait avoir

$$\exp(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Théorème 1 (Formule de Taylor)**.** *Soit f une fonction. Lorsque x est un nombre petit on a*

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

*où $k!$ est **factoriel de** k:*

$$k! = \begin{cases} 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k & \textit{si } k \neq 0 \\ 1 & \textit{si } k = 0 \end{cases}$$

Cela revient à dire que

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

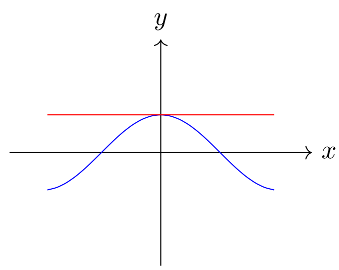
où $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Exemple 2.1
Considérons la fonction $f(x) = \cos(x)$. On a alors:

- Calculons le premier terme:

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{f(0)}{1} = f(0) = 1$$

  On dira que le **développement limité** (DL) de la fonction $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 0 vaut 1:

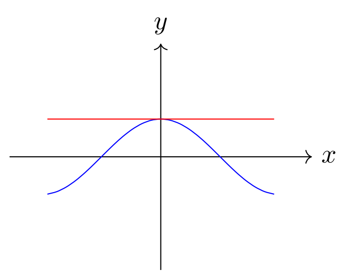


- Calculons le second terme:

$$a_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = \frac{f'(0)}{=} \sin(1) = 0$$

  On a donc le DL à l'ordre 1 qui vaut:

$$f(x) \approx 1 + 0x = 1$$

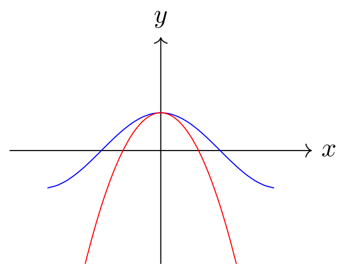


- Calculons le troisième terme:

$$a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{f''(0)}{2} = \frac{\sin'(0)}{2} = \frac{-\cos(0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

  On a donc le DL à l'ordre 2 qui vaut:

$$f(x) \approx 1 + 0x - \frac{1}{2}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

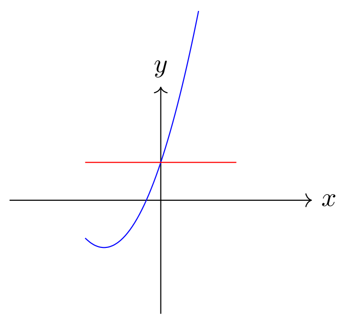


- On obtient comme cela la série de Taylor:

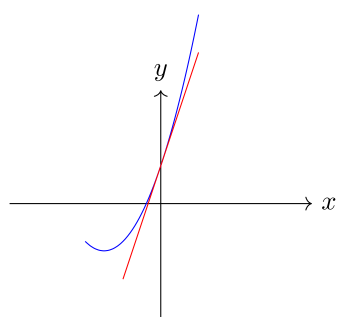
$$f(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Exemple 2.2
Considérons la fonction $f(x) = x^2 + 3x + 1$

- DL à l'ordre 0: $a_0 = f(0) = 1$ donc $f(x) \approx 1$



- DL à l'ordre 1: $a_1 = f'(0) = (2x+3)_{|x=0} = 3$ donc $f(x) \approx 1 + 3x$



C'est la tangente!
C'est toujours le cas: la courbe représentative du DL à l'ordre 1 coïncide avec la tangente.

- DL à l'ordre 2: $a_2 = \dfrac{f''(0)}{2} = 1$ donc $f(x) \approx 1 + 3x + x^2$.

  C'est la fonction f de départ!
  C'est toujours le cas pour les polynômes: la formule de Taylor finit toujours par redonner le polynôme de départ