OML2 - Chapitre 4: Séries de Fourier

Gabriel Soranzo

1 Séries trigonométriques

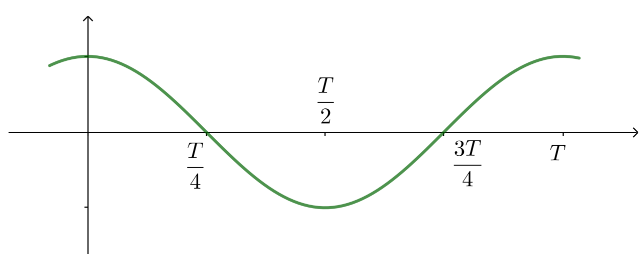
Ce sont les séries du type

$$\sum_k a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}s\right) + \sum_k b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$$

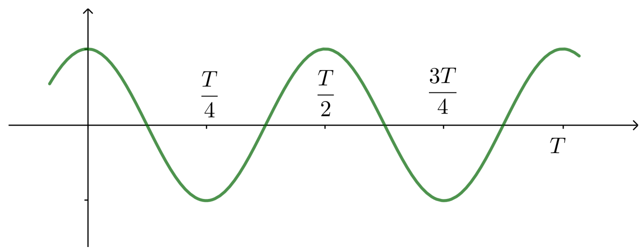
Remarque 1
Les fonctions $\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$ sont:

- Pour $k = 0$, $\cos\left(0\frac{2\pi}{T}x\right) = \cos(0) = 1$
- Pour $k = 1$, $\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ est T-periodique:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{T}(x+T)\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{T}x + \frac{2\pi}{T}R\right)\\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{T}x + \cancel{2\pi}\right)\\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\end{aligned}$$



- Pour $k = 2$, $\cos\left(2\frac{2\pi}{T}x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T/2}x\right)$: elle est donc $\frac{T}{2}$-periodique donc également T(periodique).



- Pour $k = 3$, $\cos\left(3\frac{2\pi}{T}x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T/3}x\right)$: elle est donc $\frac{T}{3}$-periodique (donc également T-periodique).

Par conséquent on voit que toutes les fonctions $\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$ et les fonctions $\sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$ sont T-periodiques.
Par conséquent encore: si elle converge, la somme $\sum_k a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$ est forcément T-periodique.

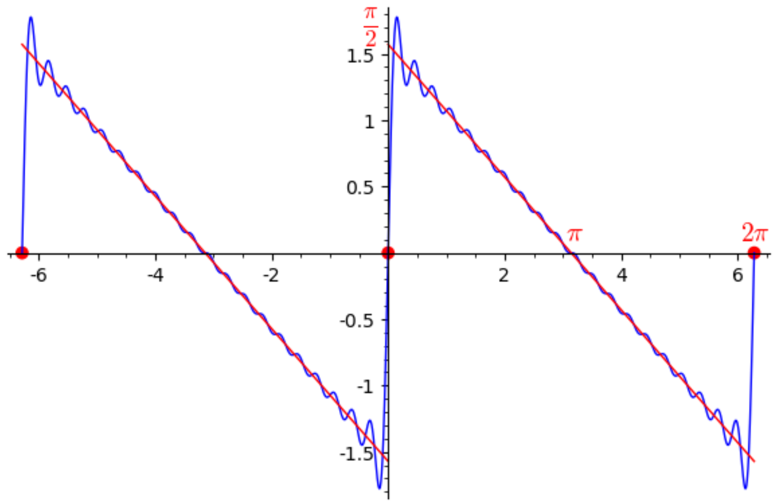
Remarque 2
Pour $k = 0$, $\cos(k\omega x) = \cos(0) = 1$ et $\sin(k\omega x) = \sin(0) = 0$ (rappelons que $\omega = \frac{2\pi}{T}$). Donc la somme trigonométrique ci-dessus est donc

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cos(k\omega x) = \underbrace{a_0 \cos(0\omega x)}_{a_0} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k \cos(k\omega x)$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \sin(k\omega x) = \cancel{b_0 \sin(0\omega x)} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} b_k \sin(k\omega x)$$

On a donc

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) = a_0 + \sum_{\mathbb{N}^*} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$$

Exemple 1.1
Considérons la somme
$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \sin(k\omega x)$$
ici $\omega = 1$ cad $\frac{2\pi}{T} = 1$ cad $T = 2\pi$.
Si cette somme converge la fonction sera donc 2π-periodique.
La somme pour k jusqu'à 20 donne le graphique ci-dessous:



Code source SageMath (ne pas noter):

```
s=plot(sum(1/k*sin(k*x),k,1,20),(x,-2*pi,2*pi))
f=plot((pi-x)/2,(x,0,2*pi),color="red")+plot((-pi-x)/2,(x,-2*pi,0),color="red")
t1=text('$\\frac{\\pi}{2}$',(-0.3,1.7),fontsize=18,color='red')
t2=text('$\\pi$',(3.2,0.15),fontsize=15,color='red')
t3=text('$2\\pi$',(6.3,0.15),fontsize=14,color='red')
p=point([0,0],color="red",size=50)+point([2*pi,0],color="red",size=50)
    +point([-2*pi,0],color="red",size=50)
s+t1+t2+t3+f+p
```

On observe que la série converge vers la périodicisée de la fonction affine $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x$:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k}\sin(kx)=\frac{\pi-x}{2}\text{ si }x\neq 0$$

Si $x=0$ tous les termes de la suite sont nulle donc la somme vaut 0.

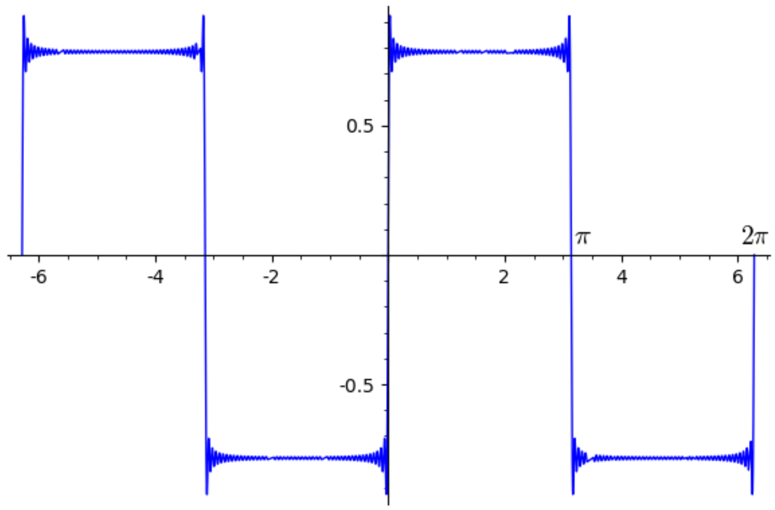
Exemple 1.2
Considérons la somme trigonométrique

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2k+1}\sin((2k+1)x)$$

Les premiers termes de cette somme sont alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\times 0+1}\sin((2\times 0+1)x)+\frac{1}{2\times 1+1}\sin((2\times 1+1)x)+\dots\\=&\frac{1}{1}\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)\end{aligned}$$

Si l'on considère les 50 premiers termes de cette somme on voit apparaître la fonction suivante:



Code source SageMath (ne pas noter):

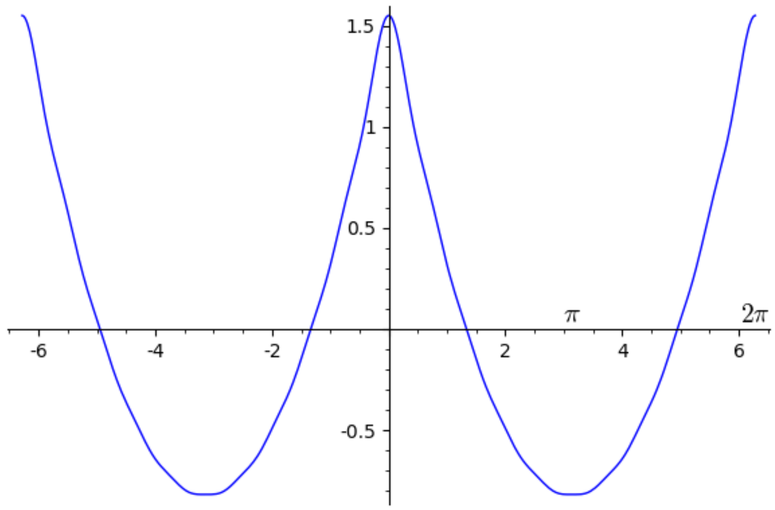
```
s=plot(sum(1/(2*k+1)*sin((2*k+1)*x),k,0,50),(x,-2*pi,2*pi))
t2=text('$\\pi$',(3.35,0.07),fontsize=15,color='black')
t3=text('$2\\pi$',(6.3,0.07),fontsize=14,color='black')
s+t2+t3
```

Si l'on pousse cette somme à l'infini on obtient ce que l'on appelle la fonction **créneau**.

Exemple 1.3
Considérons la série suivante:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}\cos(kx)$$

On obtient le graphique suivant en faisant la somme jusqu'à $k = 10$:



Code source SageMath (ne pas noter):

```
s=plot(sum(1/k^2*cos(k*x),k,1,10),(x,-2*pi,2*pi))
t2=text('$\\pi$',(3.14,0.07),fontsize=15,color='black')
t3=text('$2\\pi$',(6.28,0.07),fontsize=14,color='black')
s+t2+t3
```

On constate donc que cette somme converge vers la periodicisée d'une fonction du second degré (c'est une parabole).

Remarque 3
Comme cos est paire alors une somme $\sum_k a_k \cos(k\omega t)$ sera paire.
Comme sin est impaire alors une somme $\sum_k a_k \sin(k\omega t)$ sera impaire.

2 Série de Fourier d'une fonction

C'est l'expression d'une fonction f comme une série trigonométrique:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$$

On ne parle de série de Fourier que pour les fonctions periodiques.

Remarque 4
C'est l'équivalent des séries de Taylor

- Si f est quelconque: l'expression de f comme série entière

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$$

  s'appelle la série de Taylor de f s'obtient avec les formules de Taylor:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

- Si f est T-périodique: l'expression de f comme une série trigonométrique

$$f(x) = a_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$$

  s'appelle la **série de Fourier** de la fonction f.
  Elle s'obtient avec les formules des coefficients de Fourier que nous allons voir maintenant.

Théorème 1 (Formules des coefficients de Fourier)**.** *Soit f une fonction T-periodique.*
Si f s'écrit comme une série trigonométrique alors les coefficient de la série trigonométrique sont les suivant:

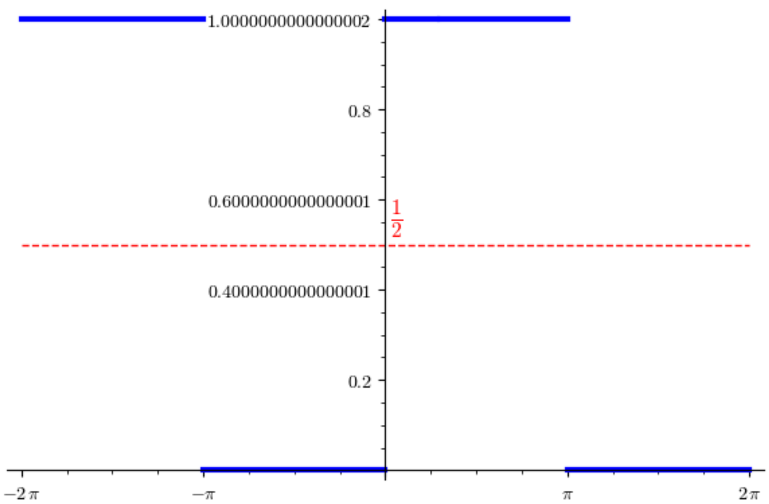
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \quad (1)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad (3)$$

Exemple 2.1
Soit f la fonction 2π periodique définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\pi, 0[\\ 1 \text{ si } t \in]0, \pi[\end{cases}$$



Code source Sage (ne pas noter): *à changer pour un meilleur axe y*

```
g=plot(1,(x,0,pi),thickness=3)
g+=plot(0,(x,-pi,0),thickness=3)
g+=plot(1,(x,-2*pi,-pi),thickness=3)
g+=plot(0,(x,pi,2*pi),thickness=3)
g+=plot(1/2,(x,-2*pi,2*pi),linestyle="--",color="red")
g+=text("$\\frac{1}{2}$",(0.2,0.56),fontsize=16,color="red")
g.show(ticks=pi, tick_formatter=pi)
```

Calcul des coefficients:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f + \int_{0}^{\pi} f\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi} 1\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(0 + [t]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}(\pi - 0) = \frac{\pi}{2\pi} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On constate que le coefficient a_0 est en fait la **valeur moyenne** de la fonction f.
Calculons maintenant les a_k:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \text{ car } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\times\cos(kt)\,dt + \int_{0^{\pi}} 1\cos(kt)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{k\pi}(\sin(k\pi)-\sin(0)) = \boxed{0}
\end{aligned}$$

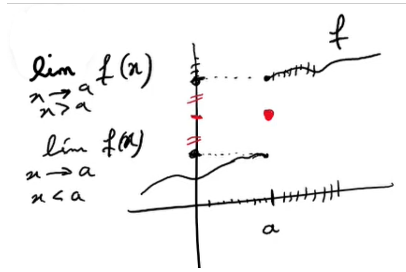
donc $a_k = 0$ pour tout $k \geq 1$.
Calculons maintenant les b_k:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(k\pi)}{k} - \frac{-1}{k}\right) = \frac{1}{k\pi}(1-\cos(k\pi)) = \boxed{\frac{1}{k\pi}(1-(-1)^k)}
\end{aligned}$$

donc $b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ et pair} \\ \frac{2}{k\pi} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$
La série de Fourier est donc

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{1\times\pi}\sin(1\times t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \dots$$

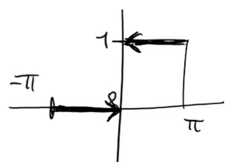
Théorème 2 (de Dirichlet)**.** *La série de Fourier converge partout là où la fonction f est continue.*
Là où f présente des limites à gauche et à droite distinctes (c'est-à-dire là où elle est discontinue) la série converge également mais vers la demi-somme des limites à gauche et à droite.



Retour 1 (exemple 1)
d'après le théorème de Dirichlet

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum \frac{2}{k\pi} \sin(kx) \text{ si } x \neq 0$$

Pour $x = 0$ on a



$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$$

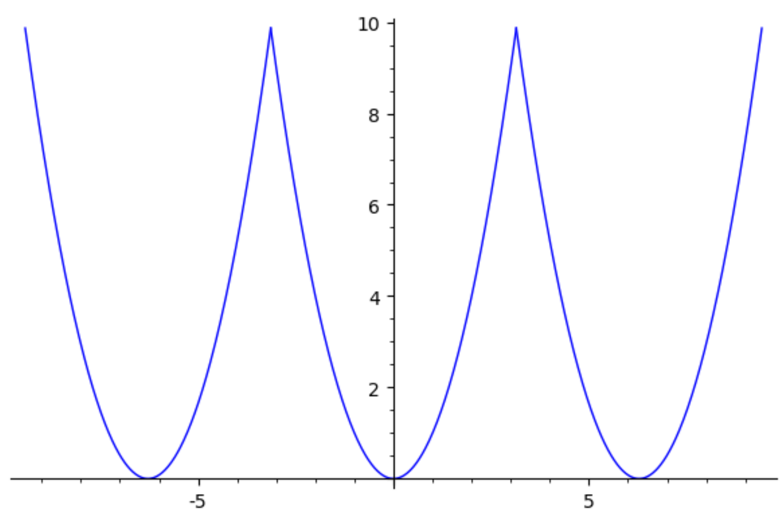
Par conséquent, d'après le théorème de Dirichlet

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum \frac{2}{k\pi} \sin(k \times 0)$$

ce qui était assez évident car tous les sinus valent 0.
On peut alors reformuler l'ensemble du raisonnement par

$$\frac{1}{2} + \sum \frac{2}{k\pi} \sin(kx) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.2
Considérons la fonction $f(x) = x^2$ sur $]-\pi;\pi[$ et 2π-periodique.



Calculons les coefficients de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2\pi}2\times\int_{0}^{\pi} t^2\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \boxed{\frac{\pi^2}{3}}$$

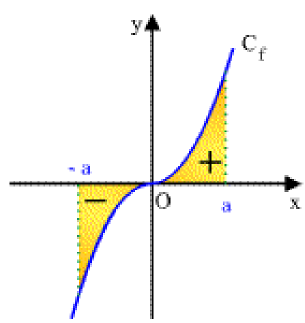
Calculons ensuite b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overbrace{t^2}^{\text{paire}}\ \overbrace{\sin(kt)}^{\text{impaire}}}_{\text{fonction impaire}}\ dt = 0$$

Explications: la fonction $t^2\sin(kt)$ est impaire car en général:

$\times$	Paire	Impaire
Paire	Paire	Impaire
Impaire	Impaire	Paire

L'intégrale de $t^2 \in (kt)$ est alors nulle car pour toute fonction impaire $g(t)$ on a $\int_a^a g(t)\,dt = 0$ ce que l'on comprendra en regardant le schéma ci-dessous:



Calculons enfin a_k:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}2\times\int_{0}^{\pi} t^2\cos(kt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2\cos(kt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[t^2\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\cancel{\pi^2\frac{\sin(k\pi)}{k}} - 0 - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} t\sin(kt)\,dt\right) \\
&= -\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} t\sin(kt)\,dt \\
&= -\frac{4}{k\pi}\left(\left[t\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(kt)}{k}\,dt\right) \\
&= -\frac{4}{k\pi}\left(\pi - \frac{-\cos(k\pi)}{k} - 0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)\,dt\right) \\
&= \frac{4}{k\pi}\left(\frac{\pi(-1)^k}{k} - \xcancel{\frac{1}{k}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}}\right) = \boxed{\frac{4(-1)^k}{k^2}}
\end{aligned}
$$

D'après le théorème de Dirichlet, comme la fonction est continue alors la série converge vers la fonction f:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^4}{k}\cos(kt) \\
&= \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(t) + \frac{4}{4}\cos(2t) - \frac{4}{9}\cos(3t) + \frac{4}{16}\cos(4t) + \dots
\end{aligned}
$$

Propriété 1. *Lien entre parité des fonctions et nullité des coefficients de Fourier:*

- *Si f est une fonction paire alors $\forall k$, $b_k = 0$.*
- *Si f est une fonction imaire alors $\forall k$, $a_k = 0$.*
- *Si f est symétrique par rapport à un point alors $\forall k \geq 1$, $a_k = 0$.*