OML2 - Chapitre 5: Equations différentielles du second degré à coefficients constants

Gabriel Soranzo

1 Rappel: premier ordre à coefficients constants

Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants:

$$y' = ay + b(t)$$

1. Donner la solution générale y_h de l'ESSM $y' = ay$:

$$y_h = C\mathrm{e}^{at} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

2. Chercher une solution particulière de l'équation: on cherche y_P du même type que le second membre $b(t)$.

3. La solution générale de l'équation est alors: $y = y_h + y_P$

Exemple 1.1
Considérons l'équation $(E):\ y' = 2y + 4$

- ESSM: $y' = 2y$ donc $y = C\mathrm{e}^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$.
- SP: comme $b = 4$ est constant alors on recherche y constante cad $y' = 0$:

$$y \text{ solution de } (E) \iff 0 = 2y + 4 \qquad \iff y = -2$$

- SG: $y = -2 + C\mathrm{e}^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$

Exemple 1.2
Considérons l'équation $(E_2) : y' + y = t$

- ESSM: $y' + y = 0 \iff y' = -y \iff y = C\mathrm{e}^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}$
- SP: ici le second membre $b(t) = t$ est une fonction affine donc on cherche $y = at + b$ donc

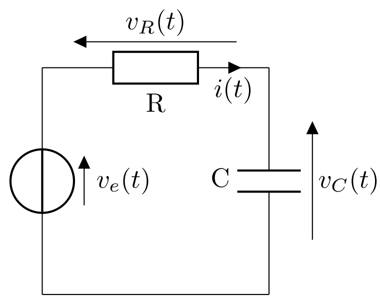
$$\begin{aligned} y' + y = t &\iff a + at + b = t \quad \iff (a-1)t + (a+b) = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ll} a-1 & = 0 \\ a+b & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -a = -1 \end{array} \right. \\ &\iff y = t - 1 \end{aligned}$$

- SG: $y = t - 1 + C\mathrm{e}^{-t}$

Remarque 1
Il y a une infinité de solutions.
Par contre dès que l'on fixe une condition initiale il y aura une unique solution:

$$
\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{ll} y' & = 2y + 4 \\ y(0) & = 3 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{ll} y & = -2 + C\mathrm{e}^{2t} \quad , C \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 3 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{ll} y & = -2 + C\mathrm{e}^{2t} \quad , C \in \mathbb{R} \\ 3 & = -2 + C\mathrm{e}^{0} \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{ll} y & = -2 + C\mathrm{e}^{2t} \quad , C \in \mathbb{R} \\ C = 5 & \end{array} \right. \\
\iff & y = -2 + 5\mathrm{e}^{2t}
\end{aligned}
$$

Exemple 1.3
On considère le circuit suivant:



On a

- la loi des Mailles: $v_e = v_C + v_R$
- la loi d'Ohm: $v_R = Ri$
- Condensateur: $i = C\dfrac{dv_C}{dt} = C\dot{v_C}$

D'où l'on déduit:

$$\underbrace{v_e}_{\text{couratn constant } E} = v_C + \underbrace{RC}_{\text{constante de temps } \tau} \dot{v_C}$$

donc

$$E = v_C + \tau\dot{v_C}$$

- ESSM:

$$\begin{aligned} v_C + \tau\dot{v_C} = 0 &\iff \dot{v_C} = -\frac{1}{\tau}v_C \\ &\iff v_C = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- SP: si v_C est constant alors $\dot{v_C} = 0$ donc

$$v_C \text{ est solution de } (E) \iff E = v_C$$

- SG:

$$V_C = E + C\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad , C \in \mathbb{R}$$

Condition initiale; si à $t = 0s$ on a $v_C = 0V$ alors

$$\begin{aligned} E + C\mathrm{e}^{-0/\tau} = 0 &\iff E + C = 0 \\ &\iff C = -E \end{aligned}$$

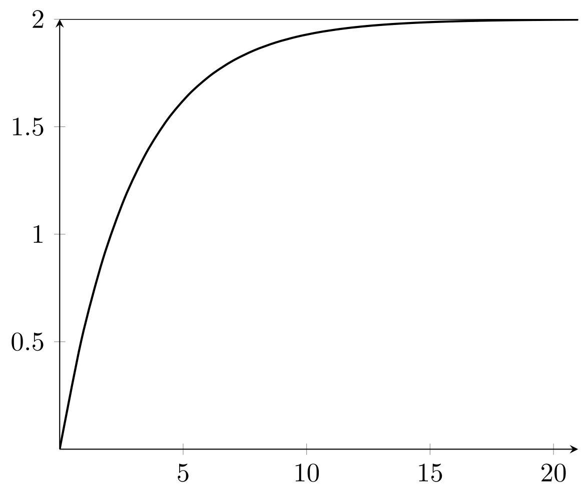
donc $v_C = E - E\mathrm{e}^{-t/\tau}$
ce qui revient à

$$v_C = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

On a donc

$$\begin{cases} v_C(0) = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} v_C(t) = E(1-0) = E \end{cases}$$

Voici le graphique correspondant par exemple avec $E = 2V$ et $\tau = 3s$



Ainsi en $t = 0s$ le condensateur se comporte comme un fil et en t grand il se compte comme un circuit ouvert.

2 Equation différentielle du second degré

Ces équations sont les équations du type suivant:

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = f(t) \quad , a, b, c \in \mathbb{R}$$

La méthode sera identique à celle pour les équations différentielles du premier ordre:

$$y = \underbrace{y_p}_{\substack{\text{solution générale de l'ESSM} \\ ay''+by'+cy=0}} + \underbrace{y_h}_{\substack{\text{sol. particulière de } (E) \\ \text{se cherche sous la même forme que } f}}$$

2.1 Equation sans second membre

C'est l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0$$

L'idée est de rechercher les solutions sous la forme e^{rt}:

$$\begin{aligned} & a(\mathrm{e}^{rt})'' + b(\mathrm{e}^{rt})' + c\mathrm{e}^{rt} = 0 \\ \iff & ar^2\mathrm{e}^{rt} + br\mathrm{e}^{rt} + c\mathrm{e}^{rt} = 0 \\ \iff & ar^2 + br + c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi on peut trouver des solutions de l'équation sous la forme e^{rt} en résolvant l'équation $ar^2 + br + c = 0$.

Méthode:

1. Résoudre l'**équation caractéristique**:

$$ar^2 + br + c = 0$$

2. trois cas sont possibles:

   - Si $\Delta > 0$: il y a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 à l'équation caractéristique donc on obtient par cette manière deux solutions à l'équation différentielle: $\mathrm{e}^{r_1 t}$ et $\mathrm{e}^{r_2 t}$. Par le principe de superposition on obtient alors les solutions

   $$y = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t} \quad , A, B \in \mathbb{R}$$

   Admis: toutes les solutions sont en fait sous cette forme.

   - Si $\Delta < 0$: il y a deux solutions complexes conjuguées r et $\overline{r}$ à l'équation caractéristique donc on obtient par cette méthode deux solutions à l'équation différentielle. En notant $r = \alpha + i\omega$ et $r = \alpha - i\omega$ ces deux solutions cela donne

   $$\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{e}^{rt} = \mathrm{e}^{\alpha + i\omega}t = \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{i\omega t} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \\ y_2 &= \mathrm{e}^{\overline{r}t} = \mathrm{e}^{\alpha - i\omega}t = \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-i\omega t} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \end{aligned}$$

Par le principe de superposition on peut combiner ces deux solutions de la manière suivante afin d'obtenir des solution réelles:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t)$$
$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\omega t)$$

Par le principe de superposition on obtient alors les solutions suivantes:

$$y = \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \quad , a, b \in \mathbb{R}$$

Ce même que précédemment on peut démontrer que l'on obtient toutes les solutions ainsi.

- Si $\Delta = 0$ dans ce cas il n'y a qu'une seule solution à l'équation caractéristique qui est e^{rt} ce qui donne l'ensemble soltuon $A\mathrm{e}^{rt}$ avec une constante $A \in \mathbb{R}$.
  Cela ne suffit pas! On peut en effet montrer qu'il faut toujours deux constantes pour trouver l'esnemble de toutes les solutions d'une équation différentielle de degré 2. Comment trouver une autre solution? L'autre solution sera te^{rt} (admis). L'ensemble de toutes les solutions sera donc
  $$y = \mathrm{e}^{rt}(A + Bt)$$

Exemple 2.1
Considérons l'équation différentielle sans second membre suivante:

$$y'' - 2y' + 3y = 0$$

L'équation caractéristique est alors

$$r^2 - 2r + 3 = 0$$

Dont le discriminant est $\Delta = 4 - 12 = -8$ donc les solutions (complexes) sont

$$r = \frac{2 \pm i\sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = \underbrace{1}_{\alpha} \pm i \underbrace{\sqrt{2}}_{\omega}$$

donc par la méthode ci-dessus la solution générale de l'équation est donc

$$y = \mathrm{e}^{t}(A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t)) \quad , A, B \in \mathbb{R}$$

2.2 Avec un second membre

Comme dans le cas des équations du premier ordre:

$$SG = SP + SG(ESSM)$$

Exemple 2.2
Considérons l'équation suivante

$$3y'' + y' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$$

1. ESSM: équation caractéristique

   $$3r^2 + r - 4 = 0$$

   Discriminant $\Delta = 1 + 48 = 7^2$ donc $r = \dfrac{-1 \pm 7}{6}$ soit $r_1 = 1$ et $r_2 = -\dfrac{4}{3}$.
   Cela nous donne donc

   $$y_h = A\mathrm{e}^{-4/3x} + B\mathrm{e}^{x}$$

2. SP: comme le second membre est $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ on cherche une solution particulière sous la forme $y = A\mathrm{e}^{2x}$:

   $$\begin{aligned} & 3y'' + y' - 4y = \mathrm{e}^{2x} \\ \iff & 3(A\mathrm{e}^{2x})'' + (A\mathrm{e}^{2x})' - 4(\mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^{2x} \\ \iff & 12A\mathrm{e}^{2x} + 2A\mathrm{e}^{2x} - 4A\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \\ \iff & 12A + 2A - 4A = 1 \\ \iff & A = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

   donc $y_P = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{2x}$.

3. SG: on a donc

   $$y = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{2x} + A\mathrm{e}^{-4/3x} + B\mathrm{e}^{x}$$

2.3 Avec des conditions initiales

L'équation de l'exemple précédent:

$$3y'' + y' - 4y = \mathrm{e}^x$$

a donc pour solution générale:

$$y = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{2x} + A\mathrm{e}^{-4/3x} + B\mathrm{e}^x$$

Il y a donc deux constante à fixer si l'on veut que la solution soit déterminée de manière unique: il y aura donc deux conditions initiales à rajouter pour fixer la solution.
Ces conditions initiales peuvent être de deux types:

- Soit deux images par exemple $y(0) = 3$ et $y(1) = 2$.
- Soit une image et une dérivée par exemple $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exemple 2.3
Résolvons la même équation que précédemment avec les C.I. suivantes:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \left(\frac{1}{10}\mathrm{e}^{2x} + A\mathrm{e}^{-4/3x} + B\mathrm{e}^x\right)_{|x=0} & = 0 \\ \left(\frac{2}{10}\mathrm{e}^{2x} - \frac{4}{3}A\mathrm{e}^{-4/3x} + B\mathrm{e}^x\right)_{|x=0} & = 0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \frac{1}{10} + A + B & = 0\,(L_1) \\ \frac{1}{5} - \frac{4}{3}A + B & = 0\,(L_2) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} (L_1): & B & = -\frac{1}{10} \\ (L_1) - (L_2): & -\frac{1}{5} + \frac{7}{3}A & = 0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} B = -\frac{1}{10} - \frac{3}{35} = -\frac{13}{70} \\ A = \frac{3}{35} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi la solution est $y = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{35}\mathrm{e}^{-4/3x} - \frac{13}{70}\mathrm{e}^x$.