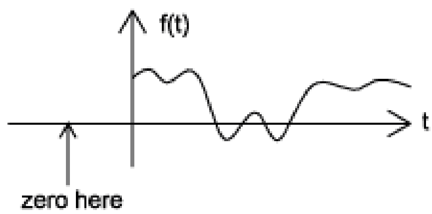
OML2 - Chapitre 7: Transformée de Laplace

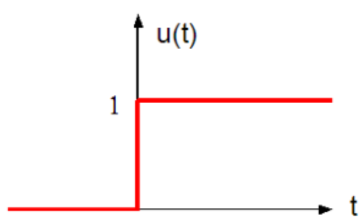
Gabriel Soranzo

1 Fonctions causales

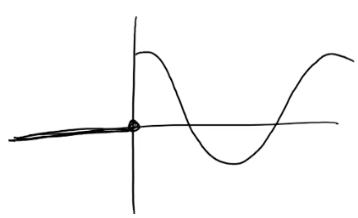
Definition 1
Une fonction $f(t)$ est **causale** lorsque $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$.



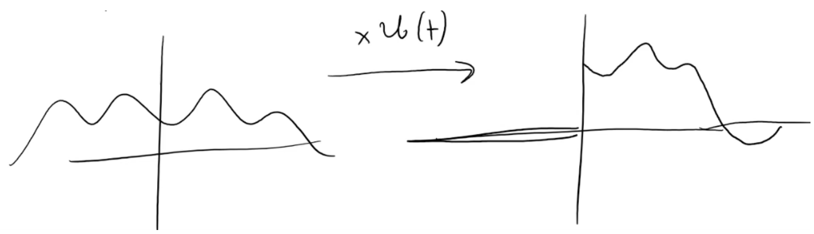
Exemple 1.1
L'échelon unité $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \leq 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$



Exemple 1.2
Considérons la fonction $\cos(t) \times \mathcal{U}(t) = \begin{cases} \cos(t) \times 0 = 0 \text{ si } i \leq 0 \\ \cos(t) \times 1 = \cos(t) \text{ si } t > 0 \end{cases}$



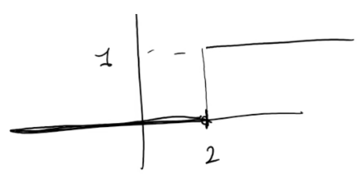
En général pour fabriquer une fonction causale il suffit de multiplier $f(t)$ par $\mathcal{U}(t)$



Dans ce chapitre il sera toujours implicite que l'on considère $f \times \mathcal{U}(t)$ au lieu de f. Ainsi lorsqu'on écrira $f(t) = t^2$ cela voudra en fait dire $f(t) = t^2 \times \mathcal{U}(t)$.

Exemple 1.3

Considérons maintenant l'échelon retardé $\mathcal{U}_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 2 \\ 1 \text{ si } t > 2 \end{cases}$

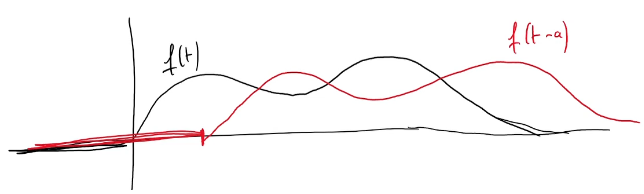


Remarquons que

$$\mathcal{U}(t-2) = \begin{cases} 0 \text{ si } t-2 \leq 0 \\ 1 \text{ si } t-2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 2 \\ 1 \text{ si } t > 2 \end{cases}$$

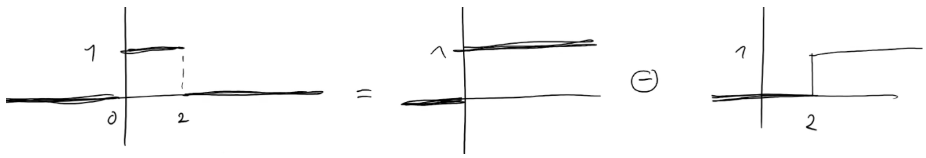
On voit ainsi que $\mathcal{U}_2(t) = \mathcal{U}(t-2)$.

En général le retard pour toute fonction s'écrit de la même manière:



Exemple 1.4

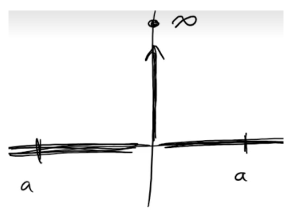
Les créneaux sont d'autres exemples de fonctions causales. On peut décomposer un créneau comme soustraction de deux échelons:



On obtient donc le créneau $c(t)$ comme

$$c(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}_2(t)$$

Exemple 1.5
Un dernier exemple de fonction causale est l'**impulsion** ou le **Dirac**, noté δ (en son honneur):



Le Dirac est caractérisé par la propriété suivante:

$$\forall a > 0, \forall f, \int_{-a}^{a} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$$

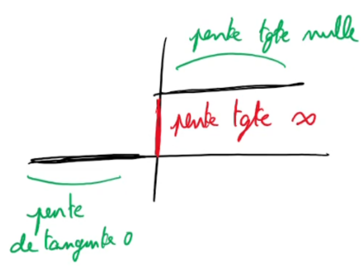
en particulier avec $f = 1$,

$$\int_{-a}^{a} \delta(t)\, dt = 1$$

Notons enfin une relation importante entre l'échelon $\mathcal{U}$ et le Dirac δ: le Dirac est la dérivée de l'échelon

$$\delta = \mathcal{U}'$$

Le schéma ci-dessous explique pourquoi:



2 Définition de la transformée de Laplace

Definition 2
Soit $f(t)$ une fonction causale alors la **transformée de Laplace** de f est la fonction $F(p)$ définie par

$$F(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^{T} e^{-pt} f(t)\, dt$$

Exemple 2.1
Calculons la transformée de Laplace de l'échelon $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{U})(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\mathcal{U}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt \\
&= \lim_{T\to+\infty} \int_0^{T} e^{-pt}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \left[\frac{-1}{p} e^{-pt}\right]_0^T \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{-1}{p}\left(e^{-pT} + \frac{1}{p} e^0\right) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{p}\left(1 - e^{-pT}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{p} \text{ si } p > 0 \\ +\infty \text{ si } p < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Avec notre convention sur les fonctions causales on peut donc conclure que

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}) = \frac{1}{p}$$

ou bien même $\boxed{\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}}$.

Exemple 2.2
Calculons maintenant la transformée de Laplace du Dirac:

$$\mathcal{L}(\delta) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)\, dt = e^{-p\times 0} = 1$$

On a donc $\boxed{\mathcal{L}(\delta) = 1}$.

3 Laplace et dérivée

On a le résultat suivant:

$$\mathcal{L}(f') = p\mathcal{L}(f) \text{ et } \mathcal{L}\left(\int f\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{lcl} \text{dérivée} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \times p \\ \text{intégrale} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \div p \end{array}$$

Démonstration 1
Démontrons ce résultat:

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\, dt = \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -pe^{-pt} f(t)\, dt$$

$$= \underbrace{e^{-\infty}}_{0} f(\infty) - e^0 \underbrace{f(0)}_{0} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = p\mathcal{L}(f)$$

Remarque 1
A partir de $\mathcal{L}(\delta) = 1$ et $\mathcal{U}' = \delta$ on peut en déduire

$$p\mathcal{L}(\mathcal{U}) = \mathcal{L}(\mathcal{U}') = \mathcal{L}(\delta) = 1$$

et l'on retrouve donc

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}) = \frac{1}{p}$$

Remarque 2
Par ailleurs, la formule pour l'intégrale nous donne les résultats suivants:

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int 1\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(\mathcal{U}) = \frac{1}{p} \times \frac{1}{p}$$

par conséquent $\boxed{\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}}$.
On a de même

$$\mathcal{L}(t^2) = \mathcal{L}\left(2\int t\right) = 2\mathcal{L}\left(\int t\right) = 2\frac{1}{p}\mathcal{L}(t) = 2\frac{1}{p}\frac{1}{p^2}$$

par conséquent $\boxed{\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{p^3}}$.

On a en procédant de même la formule générale $\boxed{\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}}$.

Remarque 3
Nous avons vu que

$$\begin{array}{lcl} \text{dérivée} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \times p \\ \text{intégrale} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \div p \end{array}$$

inversement on a

$$\begin{array}{lcl} \times t & \xrightarrow{\mathcal{L}} & -\text{ dérivée} \\ \div t & \xrightarrow{\mathcal{L}} & -\text{ primitive} \end{array}$$

On résume cela avec le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit f une fonction causale*

$$\boxed{\mathcal{L}(f') = p\mathcal{L}(f)}$$

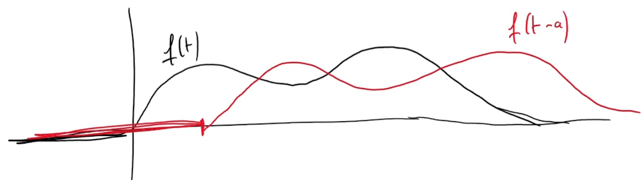
$$\boxed{\mathcal{L}\left(\int f\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(tf(t)) = -\mathcal{L}(f')}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = -\int \mathcal{L}(f)}$$

4 Laplace et retard

Etant donnée une fonction $f(t)$, on peut construire la fonction retardée $f(t-a)$ qui induit un retard de a, comme on le voit sur la courbe ci-dessous:



Le lien entre retard et transformée de Laplace est donné par les formules suivantes:

$$\mathcal{L}(f(t-a)) = e^{-pa}\mathcal{L}(f(t))$$
$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = \mathcal{L}(f)(p+a)$$

c'est-à-dire

$$\text{retard} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{atténuation}$$
$$\text{atténuation} \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{avance}$$

Démonstration 2
Démontrons cela:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t-a)) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)\,dt \text{ Cht de var: } \left\{\begin{array}{ll} u=t-a & t=u+a \\ u'=1 & \end{array}\right. \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-p(u+a)} f(u)u'\,dt \\
&= \int_{u(0)}^{u(\infty)} e^{-p(x+a)} f(x)\,dx = \int_{-a}^{\infty} e^{-p(x+a)} f(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-p(x+a)} f(x)\,dx \text{ car l'intégrale entre } -a \text{ et } 0 \text{ est nulle} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-px}e^{-pa} f(x)\,dx = e^{-pa}\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dw \\
&= e^{-pa}\mathcal{L}(f)
\end{aligned}$$

On démontre maintenant l'autre égalité:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}(e^{-at}f(t))\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}f(t)\,dt = \mathcal{L}(f)(p+a)\end{aligned}$$

Conséquence 1
Comme $\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = \mathcal{L}(f)(p+a)$ alors

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \mathcal{L}(e^{-at}\times 1) = \underbrace{\mathcal{L}(1)}_{1/p}(p+a) = \frac{1}{p+a}$$

par conséquent $\boxed{\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}}$.

Conséquence 2
Une autre conséquence:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{i\omega t}) &= \frac{1}{p+i\omega} = \frac{p-i\omega}{p^2+\omega^2} \\ &= \frac{p}{p^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\end{aligned}$$

or

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t)=\mathcal{L}(\cos\omega t + i\sin\omega t)} = \mathcal{L}(\cos\omega t) + i\mathcal{L}(\sin\omega t)$$

donc par identification:

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{p}{p^2+\omega^2}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$$