OML2 - Chapitre 8: Application de la transformée de Laplace

Gabriel Soranzo

1 Compléments Laplace et dérivées

Nous avons vu que

$$\mathcal{L}(f^{(k)}) = p^k \mathcal{L}(f) \text{ et } \mathcal{L}(f') = p\mathcal{L}(f)$$

en fait cela n'est vrai que dans les conditions de **Heaviside** c'est-à-dire lorsque

$$0 = f(0) = f'(0) = \dots$$

En général

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f') &= p\mathcal{L}(f) - f(0) \\
\mathcal{L}(f'') &= \mathcal{L}((f')') = p\mathcal{L}(f') - f'(0) = p(p\mathcal{L}(f) - f(0)) - f'(0) \\
&= p^2\mathcal{L}(f) - p\mathcal{L}(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

et de manière générale

$$\mathcal{L}(f^{(k)}) = p^k\mathcal{L}(f) - p^{k-1}f(0) - p^{k-2}f'(0) - \dots - pf^{(k-1)}(0)$$

Par exemple,

$$\mathcal{L}(f^{(4)}) = p^4\mathcal{L}(f) - p^3 f(0) - p^2 f'(0) - pf''(0) - f^{(3)}(0)$$

Démonstration 1
Démontrons cela:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f') &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt \\
&= \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -pe^{-pt} f(t)dt \\
&= e^{-\infty} f(\infty) - e^{-0} f(0) + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \\
&= 0 - 1 \times f(0) + p\mathcal{L}(f) \\
&= -f(0) + p\mathcal{L}(f)
\end{aligned}$$

2 Tableau récapitulatif

Faisons maintenant un tableau récapitulatif des différentes transformées de Laplace:

f	$\mathcal{L}(f)$
$1 = \mathcal{U}$	$\frac{1}{p}$
δ	1
t	$\frac{1}{p^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$
t^3	$\frac{6}{p^4}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\mathrm{e}^{at} f(t)$	$\mathcal{L}(f)_{\vert p-a}$
te^{at}	$\mathcal{L}(t)_{\vert p-a} = \left.\frac{1}{p^2}\right\vert_{p-a} = \frac{1}{(p-a)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$

3 Application aux equations différentielles

3.1 Premier ordre

Exemple 3.1
Considérons l'équation différentielle suivante:

$$(E)\begin{cases} y' - 2y = 2te^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On va appliquer la transformation de Laplace à cette équation:

$$\begin{aligned}
(E) \iff & \begin{cases} \mathcal{L}(y' - 2) = \mathcal{L}(2te^t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(2te^t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} p\mathcal{L}(y) - y(0) - 2\mathcal{L}(y) = 2\mathcal{L}(t)_{|p-1} \\ y(0) = 1 \end{cases} \\
\iff & \mathcal{L}(y) \times \underbrace{(p-2)}_{ESSM} \underbrace{-1}_{CI} = \underbrace{\frac{2}{(p-1)^2}}_{\text{2nd membr}} \\
\iff & \mathcal{L}(y) = \left(\frac{2}{(p-1)^2} + 1\right)/(p-2) = \frac{2 + (p-1)^2}{(p-1)^2(p-2)} \\
\iff & L(y) = \frac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)^2(p-2)} = \frac{a}{(p-1)^2} + \frac{b}{p-1} + \frac{c}{p-2}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
a &= \frac{p^2 - 2p + 3}{p-2}_{|p=1} = \frac{1 - 2 + 3}{-1} = -2 \\
c &= \frac{p^2 - 2p + 3}{p-2}_{|p=2} = \frac{4 - 4 + 3}{1} = 3 \\
\text{en } p = 0 : & \frac{3}{-2} = -2 - b + \frac{3}{-2} \text{ donc } b = -2
\end{aligned}$$

Revenons sur la résolution de l'équation différentielle:

$$\begin{aligned}
(E) \iff & \mathcal{L}(f) = \frac{-2}{(p-1)^2} + \frac{-2}{p-1} + \frac{3}{p-2} \\
\iff & \mathcal{L}(y) = -2\frac{1}{p^2}_{|p-1} - 2\frac{1}{p-1} + 3\frac{1}{p-2} \\
\iff & y = \underbrace{-2te^t - 2e^t}_{SP} + \underbrace{3e^{2t}}_{y_{ESSM}}
\end{aligned}$$

3.2 Deuxième ordre

Exemple 3.2
Résolvons maintenant l'équation suivante:

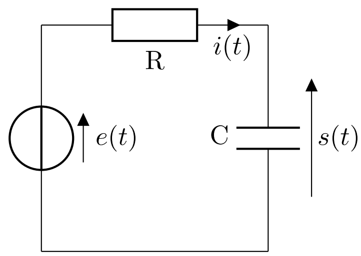
$$(E) : \begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

On applique de même la transformée de Laplace:

$$\begin{aligned}
(E) \iff & \begin{cases} \mathcal{L}(y'') - 5\mathcal{L}(y') + 4\mathcal{L}(y) = 2\mathcal{L}(1) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} p^2\mathcal{L}(y) - p\mathcal{L}(0) - y'(0) - 5(p\mathcal{L}(y) - y(0)) + 4\mathcal{L}(y) = 2\dfrac{1}{p} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \\
\iff & p^2\mathcal{L}(y) - p - 0 - 5p\mathcal{L}(y) + 5 + 4\mathcal{L}(y) = \frac{2}{p} \\
\iff & \mathcal{L}(y) \times \underbrace{(p^2 - 5p + 4)}_{ESSM} \underbrace{-p + 5}_{CI} = \underbrace{\frac{2}{p}}_{\text{2nd membre}} \\
\iff & \mathcal{L}(y) = \left(\frac{2}{p} + p - 5\right) / (p^2 - 5p + 4) \\
\iff & \mathcal{L}(y) = \frac{p^2 - 5p + 2}{p(p-1)(p-4)} \\
\iff & \mathcal{L}(y) = \frac{1/2}{p} + \frac{2/3}{p-1} + \frac{-1/6}{p-4} \\
\iff & \mathcal{L}(y) = \underbrace{\frac{1}{2} \times 1}_{SP} + \underbrace{\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{6}e^{4t}}_{ESSM}
\end{aligned}$$

4 Fonction de transfert

Exemple 4.1
On considère le circuit suivant:



On a alors

$$e(t) = s(t) + Ri(t) \text{ et } i(t) = Cs'(t)$$

donc

$$e(t) = s(t) + \underbrace{RC}_{\tau} s'(t)$$

on a donc à résoudre

$$s + \tau s' = e$$

où le second membre e peut avoir différentes formes:

- e peut être un échelon $\mathcal{U}$: au temps $t = 0$ on ferme le circuit par un interrupteur
- e peut être un dirac δ: au temps $t = 0$ on envoie une impulsion dans le circuit en appuyant sur un bouton poussoir
- e peut être sinusoïdal $A\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$: au temps $t = 0$ on ferme le circuit par un interrupteur et le générateur fournit une tension sinusoïdale

Dans tous les cas on est dans les conditions de Heaviside: $s(0) = 0$. Résolvons maintenant l'équation différentielle:

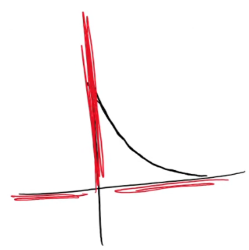
$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(s) + \tau\mathcal{L}(s') = \mathcal{L}(e) \\
\iff &\mathcal{L}(s) + \tau(p\mathcal{L}(s) - s(0)) = \mathcal{L}(e) \\
\iff &\mathcal{L}(s) \times \underbrace{(1 + \tau p)}_{ESSM} - \underbrace{0}_{CI} = \underbrace{\mathcal{L}(e)}_{\text{2nd membre}} \\
\iff &\mathcal{L}(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + \tau p}}_{\text{Fct de transfert}} \mathcal{L}(e) \\
\iff &\mathcal{L}(s) = H(p)\mathcal{L}(e)
\end{aligned}$$

A partir de la fonction de transfert du système et du second membre e (l'entrée du système) on peut facilement trouver la sortie s avec la formule:

$$s = \mathcal{L}^{-1}(H(p)\mathcal{L}(e))$$

- Si $e = \delta$: la sortie s s'appelle la réponse impulsionnelle

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(s) = H(p)\mathcal{L}(\delta)\\
\Longleftrightarrow\ &\mathcal{L}(s) = \frac{1}{1+\tau p} \times 1\\
\Longleftrightarrow\ &\mathcal{L}(s) = \frac{1}{\tau\left(\dfrac{1}{p} + p\right)} = \frac{1}{\tau}\frac{1}{\dfrac{1}{\tau} + p}\\
\Longleftrightarrow\ &s = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}t} = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}
\end{aligned}$$



- Si $e = \mathcal{U} = 1$: réponse indicielle

$$\begin{aligned}
&L(s) = H(p)\mathcal{L}(\mathcal{U}) = H(p)\mathcal{L}(1)\\
\Longleftrightarrow\ &\mathcal{L}(s) = \frac{1}{1+\tau p} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{p(1+\tau p)} = \frac{1}{p} + \frac{\frac{1}{-1/\tau}}{1+\tau p}\\
\Longleftrightarrow\ &\mathcal{L}(s) = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p} = dfrac1p - \tau\frac{1}{\tau(\frac{1}{\tau}+p)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{1/\tau + p}\\
\Longleftrightarrow\ &s = 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}
\end{aligned}$$